SOLUCIONES

---

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) (2 puntos) Sea G un grupo de orden 25. Entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}_{25}$ o a $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

Solución: VERDADERO. Sabemos que si G es un grupo finito de orden p^2, para p primo, entonces G es abeliano. Ahora utilizando el Teorema de clasificación de grupos abelianos finitos sabemos que sólo (salvo isomorfismo) hay dos posibles grupos abelianos de orden p^2. Por lo tanto, $G \simeq \mathbb{Z}_{p^2}$ o $G \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. En el enunciado se tiene $p = 5$.

b) (2 puntos) $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 4\rangle \simeq \mathbb{Q}$.

Solución: FALSO. $\mathbb{Q}$ es un cuerpo, mientras que $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 4\rangle$ no es ni siquiera domino. Esto es debido a que $x^2 - 4$ es reducible y por lo tanto la clase de $x - 2$ es un divisor de cero en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 4\rangle$.

---

2. Sea $A = \mathbb{Q}[x]/\langle x^7 - 3x^6 + 9x^3 + 21x + 3\rangle$. Determinar:

a) (1 punto) Si A es un dominio.

Solución: Sea $f(x) = x^7 - 3x^6 + 9x^3 + 21x + 3$. Por el criterio de Eisenstein con el primo $p = 3$ se tiene que $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Por lo tanto el ideal que genera, $I = \langle f(x)\rangle$, es maximal. Esto es debido a que si existiera un ideal $J \subset \mathbb{Q}[x]$ tal que $I \subset J$, entonces como $\mathbb{Q}[x]$ es un DIP existiría un polinomio $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(x) \in J = \langle g(x)\rangle$. Por lo tanto $g(x)$ dividiría a $f(x)$. Pero esto no es posible salvo que $g(x) \in \mathcal{U}(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q}^*$ y entonces $J = \mathbb{Q}[x]$; o bien, $g(x)$ es asociado con $f(x)$ y entonces $J = I$.
Así, aplicando un resultado que nos dice que un ideal es maximal si y sólo si el anillo cociente es un cuerpo, tenemos demostrado que A es un cuerpo, en particular un dominio.

b) (1 punto) Si A es un cuerpo.

Solución: Ver solución del apartado anterior.

c) (1 punto) El número de elementos de A.

Solución: Aplicando el Algoritmo de Euclides de la división: tomando un polinomio cualquiera $h(x)$ y lo dividimos por $f(x)$ obtenemos un resto que es de grado menor que 7. Por lo tanto, los representantes de las clases de equivalencia son los polinomios de grado menor a 7. Ahora, hay infinitos polinomios de grado menor a 7 con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto $|A| = \infty$.

---

3. Clasificación de los grupos de orden 99.

a) (1.5 puntos) Demuestra que todo grupo de orden 99 es abeliano.

Solución: El Tercer Teorema de Sylow nos da información sobre el número de p-subgrupos de Sylow de un grupo finito. Concretamente, lo que dice es que si G es un grupo de orden $|G| = p^n \cdot m$ con p primo y $(m, p) = 1$, entonces el número de p-subgrupos de Sylow de G, s_p, satisface:

$$s_p \,|\, m \qquad \text{y} \qquad s_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

En nuestro caso tenemos $99 = 3^2 \cdot 11$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{lll} p = 3 \quad \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} s_3|11 \Longrightarrow s_3 = 1, 11 \\ s_3 \equiv 1 \pmod{3} \end{array} \right\} & \Longrightarrow \quad s_3 = 1, \\ p = 11 \quad \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} s_{11}|9 \Longrightarrow s_{11} = 1, 3, 9 \\ s_{11} \equiv 1 \pmod{11} \end{array} \right\} & \Longrightarrow \quad s_{11} = 1. \end{array}$$

Es decir, $\mathrm{Syl}_3(G) = \{P_3\}$ y $\mathrm{Syl}_{11}(G) = \{P_{11}\}$ con $|P_3| = 9$ y $|P_{11}| = 11$. Entonces (resultado visto en clase) G es isomorfo al producto directo de P_3 y P_{11}. Como $|P_3| = 3^2$ tenemos que P_3 es abeliano (ver Ejercicio 1 (a)) y como $|P_{11}| = 11$ se tiene que P_{11} es cíclico, en particular abeliano. Concluyendo que $P_3 \times P_{11}$ es abeliano.

b) (1.5 puntos) Determina todo los grupos de orden 99 salvo isomorfismo.

Solución: Sabemos por el apartado anterior que un grupo G de orden 99 es abeliano. Por lo tanto para clasificar los grupos de orden 99 solo tenemos que aplicar el Teorema de clasificación de grupos abelianos finitos. Como $99 = 3^2 \cdot 11$ se tiene:

$$\mathbb{Z}_{99} \simeq \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{11} \qquad \text{o} \qquad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{33} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{11}.$$