ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS • Grado en Matemáticas • **C2**

(16-11-2015) - 10:30 — Curso 2015-2016

SOLUCIONES

1. Estudia si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

Dado un grupo finito G existen grupos K y M tales que

a) **G es isomorfo a K,**

b) **$K \leq M$,**

c) **el mínimo conjunto que genera M tiene cardinal a lo sumo 2.**

Solución: El Teorema de Cayley nos dice que existe un monomorfismo de G en S_G, el conjunto de biyecciones del conjunto G. En particular si G es finito de orden n entonces $S_G \simeq S_n$, el grupo de permutaciones de n elementos. Así, en este caso tenemos un homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow S_n$ inyectivo. Ahora gracias al Teorema de Isomorfía tenemos que $G \simeq \phi(G) = K \leq S_n$, ya que ϕ es inyectiva y por lo tanto $\mathrm{Ker}(\phi)$ es trivial. Por ultimo, tomando $M = S_n$ y aplicando el apartado (c) del ejercicio 2 concluimos que la afirmación es Verdadera.

---

2. Demuestra que para $i = 1, 2, 3$ se tiene que $S_n = \langle B_i \rangle$, donde B_i es el conjunto definido por:

a) $B_1 = \{(1\,2), (1\,3), (1\,4), \ldots, (1\,n)\}$,

Solución: Basta ver que $(a\,b) = (1\,a)(1\,b)(1\,a)$. Así obtenemos todas las transposiciones de S_n que sabemos que generan S_n.

b) $B_2 = \{(1\,2), (2\,3), (3\,4), \ldots, (n-1\,n)\}$,

Solución: Veamos que con los elementos de B_2 podemos construir todos los de B_1. Por inducción podemos ver la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{array}{rcl} (1\,3) & = & (1\,2)(2\,3)(1\,2), \\ (1\,4) & = & (1\,3)(3\,4)(1\,3), \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (1\,k+1) & = & (1\,k)(k\,k+1)(1\,k), \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (1\,n) & = & (1\,n-1)(n-1\,n)(1\,n-1), \end{array}$$

c) $B_3 = \{(1\,2),\ (1\,2\,\ldots\,n)\}$.

Solución: Veamos que podemos generar B_2 a partir de $\sigma = (1\,2\,\ldots\,n)$ y $(1\,2)$. En primer lugar, observar que tenemos lo siguiente

$$\sigma^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ k & k+1 & k+2 & \ldots & k-1 \end{pmatrix}$$

Así tenemos $\sigma^k(1\,2)\sigma^{-k} = (\sigma^k(1)\,\sigma^k(2)) = (k\,k+1)$ para $k = 1, \ldots, n$.

3. Considera el grupo $G = \langle a, b\rangle \leq S_6$, con $a = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$ y $b = (1\,6)(2\,5)(3\,4)$.

a) Demuestra que $N = \langle a\rangle$ es normal en G.

Solución: Hay que ver que para todo $g \in G$ se tiene que $gNg^{-1} \subseteq N$. Como $N = \langle a\rangle$ y $G = \langle a, b\rangle$ basta con ver que $b^n a^m b^{-n} = a^s$ para todo entero n, m y un entero s que depende de n y m. Ahora como $|b| = 2$, es suficiente ver que $ba^m b = a^s$. Además como $(bab)^m = ba^m b$, concluimos que el único cálculo que necesitamos hacer es ver si existe un entero k tal que $bab = a^k$. Como tenemos $bab = (6\,5\,4\,3\,2\,1) = a^{-1} = a^5$, concluimos que N es normal en G.

b) Calcula el orden de G/N.

Solución: Veamos cuantos clases de equivalencia hay en $G/N = \{gN \mid g \in G\}$. Si $g = a^k h$ o $g = ha^k$ para $h \in G$, obtenemos que $gN = hN$. Si repetimos este proceso obtenemos que $G/N = \{N, bN\}$. Por lo tanto, $|G/N| = 2$.

c) Demuestra que G es resoluble.

Solución: Tenemos un troceado de G formado por N y G/N. Como N es cíclico de orden 6 y G/N es de orden 2 (y por lo tanto cíclico) se tiene que G es resoluble.

d) Calcula el orden de G.

Solución: Por el Teorema de Lagrange se tiene $|G/N| = |G|/|N|$. De aquí se deduce $|G| = |N||G/N| = 6 \cdot 2 = 12$.