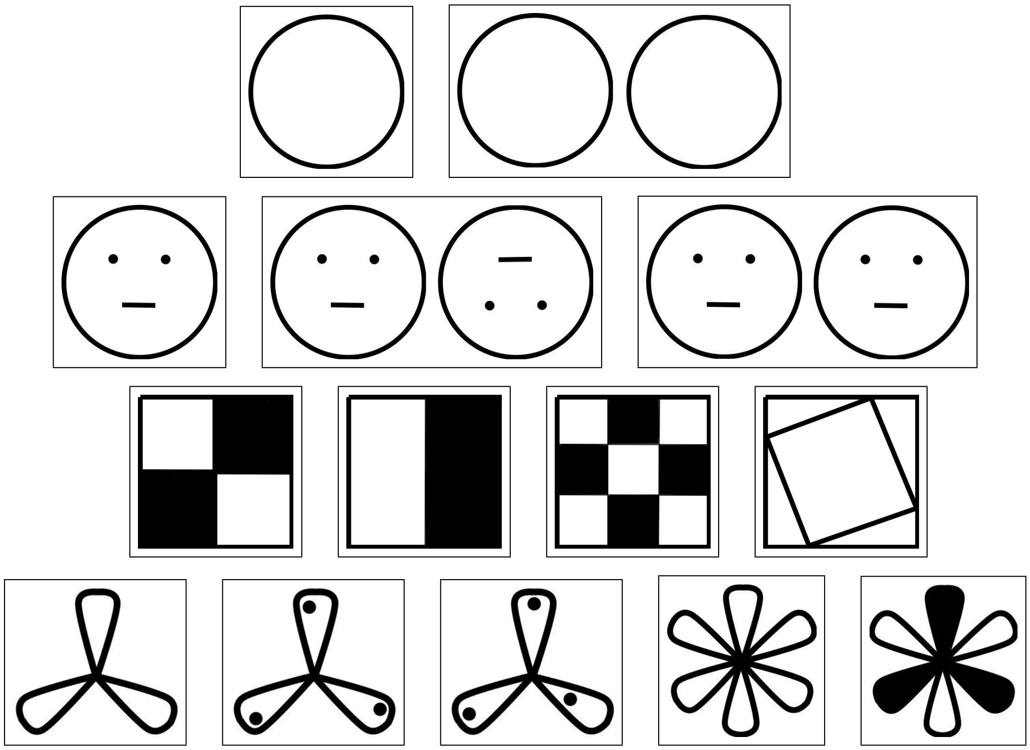
ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (15-9-2015) | **Grado en Matemáticas** **Curso 2015-2016** | **Hoja A1**

1. (Isometrías) Calcula los grupos de isometrías de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, describiendo de forma explícita sus elementos; supón que están centrados en el origen (el marco no forma parte del subconjunto):



2. (Isometrías) Calcula el grupo de isometría de un rectángulo que no es un cuadrado.

3. (Definición) Demuestra que el conjunto $E = \{\overline{5}, \overline{15}, \overline{25}, \overline{35}\} \subset \mathbb{Z}_{40}$ es un grupo con el producto módulo 40. Identifica el elemento neutro, y el opuesto de cada elemento.

4. (Definición) Considera el conjunto $F = \{\overline{1}, \overline{9}, \overline{16}, \overline{22}, \overline{53}, \overline{74}, \overline{79}, \overline{81}, \lambda\} \subset \mathbb{Z}_{91}$. Se sabe que F es un grupo con el producto módulo 91. ¿Cuál es el valor de λ?

5. (Definición) Sea n un entero positivo. Demuestra:

a) $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ es un grupo. Donde $\mathbb{Z}_n^\times$ es el conjunto de restos módulo n de enteros coprimos con n.

b) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ es un grupo si y sólo si n es primo. Donde $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{\overline{0}\}$. Observa que si n es primo, $\mathbb{Z}_n^\times = \mathbb{Z}_n^*$.

6. (Definición) [Milne] Sea G un conjunto finito y $* : G \times G \longrightarrow G$ una operación binaria. Demostrar que $(G, *)$ es un grupo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- Para todo $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- Existe un elemento $e \in G$ tal que $a * e = a = e * a$.
- Si $(a * b = a * c)$ o $(b * a = c * a)$ entonces $b = c$.

7. (Definición) Demostrar que las siguientes matrices de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ forman un grupo con la multiplicación de matrices.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8. (Definición) Considera el subconjunto H de S_6 formado por las permutaciones σ que satisfacen $\sigma(3)+\sigma(4)=7$ (donde $+$ es la suma en $\mathbb{Z}$) ¿Es H grupo con la operación composición de funciones?

9. (Tablas) La siguiente tabla corresponde a un grupo. Completa los espacios en blanco.

	e	a	b	c	d
e	e	$-$	$-$	$-$	$-$
a	$-$	b	$-$	$-$	e
b	$-$	c	d	e	$-$
c	$-$	d	$-$	a	b
d	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

10. (Tablas) Sea $G = (\{a,b,c\},*)$ un grupo, donde a es el elemento neutro. Escribe su tabla. Deduce que el grupo es abeliano. Más aún, observa que todo grupo de orden 3 es cíclico.

11. (Tablas) Comprueba si las siguientes tablas de multiplicación dan lugar o no a grupos.

	X	Y	Z
X	Y	X	Z
Y	X	Z	Y
Z	Z	Y	X

	1	2	3	4
1	2	4	1	3
2	4	3	2	1
3	1	2	3	4
4	3	1	4	2

	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	e	d	a	c
c	c	a	e	b	d
d	d	c	a	e	b
e	e	d	b	c	a

Sugerencia: Si todos los elementos se pueden escribir como multiplicaciones de $a_1, a_2, \dots, a_k$, es suficiente comprobar la propiedad asociativa para dichos a_j.

12. (Tablas) Construye la tabla de multiplicar de los siguientes grupos: $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$, S_3.

13. (Subgrupos) Halla el retículo de subgrupos de S_3, C_4, C_6, D_3, D_5 y D_4.

14. (Subgrupos) Encuentra en S_3 dos subgrupos H, K tales que $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ no sea subgrupo de S_3.

15. (Subgrupos) Demuestra que S_3 no está generado por un elemento. Encuentra dos generadores para S_3.

16. (Subgrupos) Calcula los órdenes de todos los elementos de S_3, D_4 y D_5.

17. (Subgrupos) En cada uno de los grupos C_5, C_8 y C_{12} busca qué elementos generan todo el grupo.

18. (Subgrupos) Calcula los elementos y la tabla de multiplicación del subgrupo de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Este grupo se denota Q y se le llama «Grupo de cuaterniones».

19. (Subgrupos) [Milne] Considera los elementos

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Muestra que $a^4 = 1$ y que $b^3 = 1$, pero que ab tiene orden infinito, y por tanto que el grupo $\langle a, b\rangle$ es infinito.

20. (Lineales) Vamos a ver cómo se comportan las composiciones de giros y reflexiones que están en $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$.

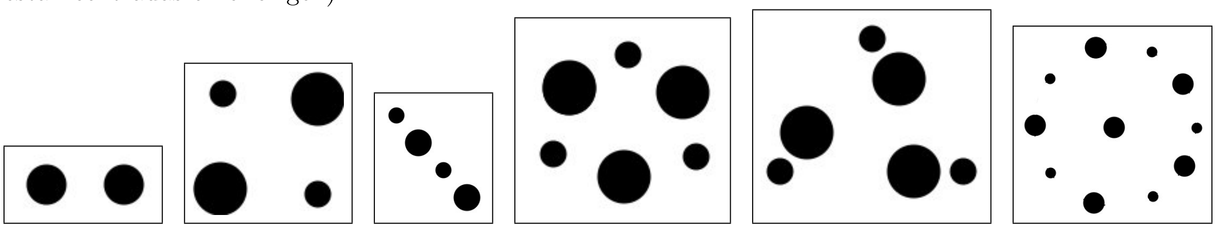
a) Demuestra que $g_\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta}$.

b) Demuestra que r_θ tiene orden 2 y que g_θ tiene orden finito si y sólo si $\theta/2\pi$ es un número racional.

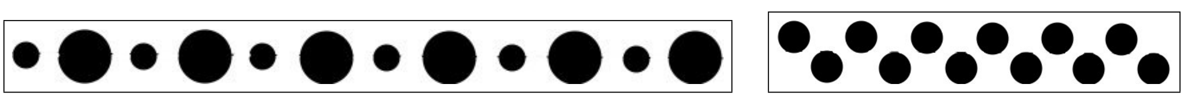
c) Demuestra que $g_\beta r_\alpha = r_{\alpha+\beta/2}$ y $r_\alpha g_\beta = r_{\alpha-\beta/2}$.

d) Demuestra usando el apartado anterior que $r_\alpha r_\beta = g_{2(\alpha-\beta)}$.

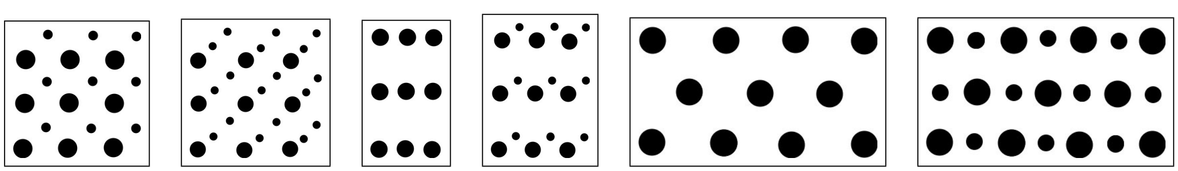
21. (Lineales) Vamos a definir una *molécula 2D* como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por una unión finita de círculos disjuntos. Calcula el grupo de isometrías de las siguientes moléculas 2D (supón que están centradas en el origen):



22. (Isometrías) Vamos a definir una *fibra 2D* como un subconjunto X de $\mathbb{R}^2$ formado por una unión de círculos disjuntos, con un número finito de valores para sus radios, de forma que el subgrupo de traslaciones de $\mathrm{Isom}(X)$ esté generado por un elemento (distinto de la identidad). Calcula el grupo de isometrías de las siguientes fibras, suponiendo que los dibujos se extienden hasta infinito (en la primera figura supón además que el origen está en el centro de uno de los círculos grandes y que la distancia horizontal entre los centros de dos círculos contiguos es 1; en la segunda, supón que la distancia entre los centros de dos círculos contiguos de la fila de arriba es 1, que el origen está en la línea horizontal que pasa entre las dos filas y que en vertical coincide con unos de los centros de un círculo de la fila de arriba).



23. (Isometrías) Vamos a definir un *cristal 2D* como un subconjunto X de $\mathbb{R}^2$ formado por una unión de círculos disjuntos, con un número finito de valores para sus radios, de forma que el subgrupo de traslaciones de $\mathrm{Isom}(X)$ está genereda por dos elementos distintos de la identidad (y no por uno). Calcula el grupo de isometrías de los siguientes cristales, suponiendo que los dibujos se extienden hasta infinito (supón también que el origen está en el centro de uno de los círculos de mayor radio, y que el centro del siguiente círculo en el eje x está a distancia 1; en los dibujos tercero y cuarto, asume también que el centro del siguiente círculo en el eje y está a distancia 2).



24. (Isometrías) Sabemos que X, un cierto cristal 2D, satisface que el grupo de traslaciones que lo dejan fija está generado por las traslaciones asociadas a los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$. que el subgrupo de $\mathrm{Isom}(X)$ que fija el origen está generado por $g_{2\pi/4}$ y $r_{\pi/4}$. Finalmente, sabemos que en $[0,1)^2$ sólo tres círculos de X tienen su centro, uno de radio $1/16$ en $(0,0)$ y dos de radio $1/8$. Dibuja X. *Sugerencia: Observa que por cada círculo de radio* $1/8$ *con centro en* $[0,1)^2$ *podemos generar copias con centro en* $[0,1]^2$ *usando elementos de* $\mathrm{Isom}(X)$.

25. (Permutaciones) Tenemos una mazo de seis cartas. Vamos a ver dos maneras típicas de barajar. El *out shuffle* consiste en partir el mazo en dos tacos iguales y entrelazarlos de forma que queden cartas alternadas de cada uno de los tacos, la primera carta quedándose fija. El *in shuffle* es igual pero la primera carta del mazo pasa a la segunda posición.
Calcula cuántas veces debes repetir el *out shuffle* para que el mazo vuelva a su posición inicial. Haz lo mismo para el *in shuffle*.

26. (Permutaciones) En la siguiente foto se puede ver el cubo de Rubik 2x2x2 (que se suele denominar *cubo de bolsillo*) modificado de forma que cada cubito es de un color.

El cubo está puesto en lo que vamos a considerar la posición inicial. Tras hacer varios movimientos simples llegamos a alguna otra posición; el movimiento total habrá desordenado los 8 cubitos del cubo. Siempre podemos considerar que cogemos el cubo del cubito que tiene el 0, así que el movimiento desordenará sólo los cubitos restantes. Por tanto, el grupo R de movimientos será un subgrupo de S_7; de hecho, $R = \langle r, u, b\rangle$ donde r es el giro de la cara derecha (*right*), $r = (2543)$, b es el giro de la cara trasera (*back*), $b = (4567)$ y u es el giro de la cara de arriba (*up*), $u = (1652)$, todos en el sentido de las agujas del reloj.

a) Calcula el orden de los elementos r, b, u.

b) Calcula el orden de los elementos rb y br.

c) Calcula el tamaño del sugrupo $H = \langle r^2, u^2\rangle$.

d) Tenemos el cubo en la posición `3216547` (siendo `1234567` la posición inicial). Sabiendo que hemos llegado a dicha posición por un elemento de H, ¿cómo podemos resolver el cubo (es decir, llegar a la posición inicial)?

27. (Homomorfismos) Se define $f\colon D_3 \to \{\pm 1\}$ mediante: $f(a) = 1$ si a es una rotación y $f(a) = -1$ si a es una reflexión. Demuestra que f es un homomorfismo de grupos. Calcula el núcleo de f.

28. (Homomorfismos) Si $(G, \cdot)$ es un grupo, definimos una nueva operación en G escribiendo $x * y := y \cdot x$. Demuestra que $(G, *)$ es un grupo y que $(G, *)$ y $(G, \cdot)$ son isomorfos.

29. (Homomorfismos) Sea G un grupo.

a) Demuestra que todo homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to G$ queda determinado por el valor $f(1)$.

b) Demuestra que para cada $a \in G$ se puede definir un homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to G$ tal que $f(1) = a$.

c) Si G es finito, el único homomorfismo $f : G \to \mathbb{Z}$ es el trivial.

30. (Homomorfismos) Sea G un grupo.

a) Si $f : \mathbb{Z}_n \to G$ es un homomorfismo de grupos, demuestra que la función queda determinada por el valor $f(\overline{1})$, y $f(\overline{1})$ es un elemento de G cuyo orden divide a n. Recíprocamente, demuestra que si $g \in G$ es un elemento cuyo orden divide a n, entonces existe un (único) homomorfismo de grupos $h : \mathbb{Z}_n \to G$ que cumple que $h(\overline{1}) = g$.

b) Halla todos los homomorfismos de grupos de $\mathbb{Z}_6$ en $\mathbb{Z}_4$ y de $\mathbb{Z}_4$ en $\mathbb{Z}_6$.

c) Halla todos los homomorfismos de grupos de $\mathbb{Z}_6$ en D_4.

d) Sea la aplicación $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{10}$ dada por $f(x) = 3x$ ¿es un homomorfismo de grupos?.

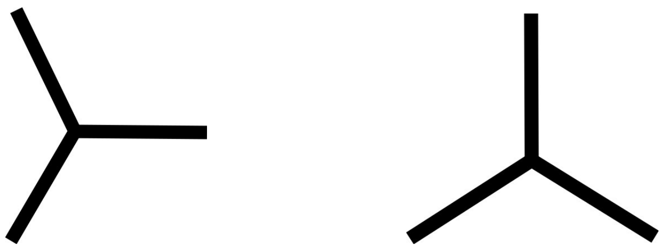
e) Decide de manera razonada el número de homomorfismos sobreyectivos de $\mathbb{Z}_{20}$ a $\mathbb{Z}_8$. ¿Cuántos hay si no pedimos que los homomorfismos sean sobreyectivos?

31. (Homomorfismos) [Milne] Muestra que el grupo de cuaterniones Q sólo tiene un elemento de orden 2 (ver definición en ejercicio 18). Deduce que Q y D_4 no son isomorfos.

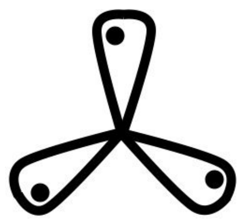
32. (Homomorfismos) Sea G un grupo cíclico. Demuestra que $G \cong \mathbb{Z}$ ó $G \cong \mathbb{Z}_n$.

33. (Homomorfismos) Sean X, Y conjuntos tal que $|X| = |Y|$. Demuestra que $S_X \cong S_Y$.

34. (Homomorfismos) Halla un isomorfismo entre los grupos de isometrías de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

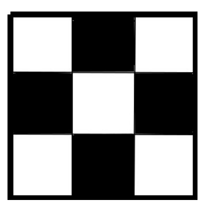


35. (Homomorfismos) Calcula las tablas de multiplicar correspondientes al subgrupo D de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_7)$ dado por matrices diagonales y al grupo $\mathrm{Isom}(X)$, con X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado por el siguiente dibujo:



Observando dichas tablas, muestra que hay un encaje de $\mathrm{Isom}(X)$ en D. Comprueba que la imagen de $g_{2\pi/3}$ en D tiene el mismo orden que $g_{2\pi/3}$.

36. (Homomorfismos) $D_4 = \mathrm{Isom}(X)$ con $X \subset \mathbb{R}^2$ dado por la figura



a) Sea $V = \{(1,1), (-1,1), (-1,-1), (-1,1)\}$ el conjunto de vértices del cuadrado exterior. Muestra que la aplicación que envía un elemento $f \in \mathrm{Isom}(X)$ a su restricción $f|_V$ al conjunto de vértices V es un encaje de D_4 en $\mathrm{Sym}(V)$.

b) Considerando el isomorfismo natural entre $\mathrm{Sym}(V)$ y S_4, tenemos un encaje de D_4 en S_4. Comprueba que las imágenes de r_0 y $g_{\pi/2}$ en S_4 satisfacen también la ecuación $r_0 g_{\pi/2} = g_{\pi/2}^{-1} r_0$.

37. (Homomorfismos)

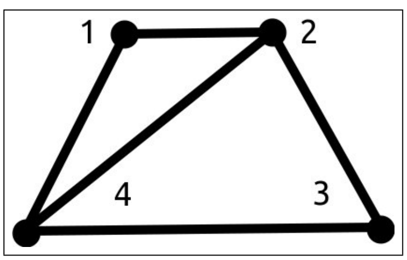
a) Teniendo en cuenta que $z \mapsto e^{i\theta} z$ corresponde en los complejos a un giro de ángulo θ, demuetra que hay un isomorfismo natural entre $\mathrm{U}(1)$ y $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.

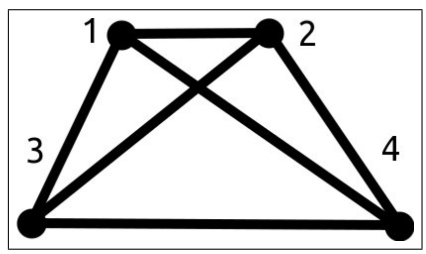
b) Podemos ver un giro de $\mathbb{R}^2$ como un giro en $\mathbb{R}^3$ con respecto a un eje. Así, muestra que hay un encaje de $\mathrm{U}(1)$ en $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

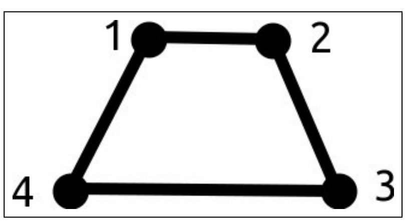
38. (Automorfismos de grafos) Vamos a definir un *grafo* X como un par (V, E) con V un conjunto finito y E un subconjunto de $V \times V$ invariante por la transformación $(x, y) \mapsto (y, x)$. A los elementos de V se les denomia *vértices* y a los elementos de E *aristas*. Un grafo captura la idea de red con unos nodos conectados o no conectados.
Si tenemos dos grafos $X_1 = (V_1, E_1)$ y $X_2 = (V_2, E_2)$, nos interesa saber si en el fondo representan redes con las mismas conexiones. Esto se puede formalizar diciendo que existe un isomorfismo de X_1 en X_2, que es una aplicación $f : V_1 \to V_2$ biyectiva que satisface que $(a, b) \in E_1$ si y sólo si $(f(a), f(b)) \in E_2$ (es decir, preserva aristas).
Un isomorfismo de un grafo X en el mismo se denomina automorfismo de X. El conjunto de automorfismos de X, $\mathrm{Aut}(X)$, es un subgrupo de $\mathrm{Sym}(V)$. Este grupo nos da información sobre el grafo. Por ejemplo, si $\mathrm{Aut}(X_1)$ y $\mathrm{Aut}(X_2)$ son grupos no isomorfos, entonces X_1 y X_2 son grafos no isomorfos.
A la hora de ver si un elemento f de $\mathrm{Sym}(V)$ pertenece a $\mathrm{Aut}(X)$, podemos tener en cuenta que debe cumplir las siguientes propiedades:

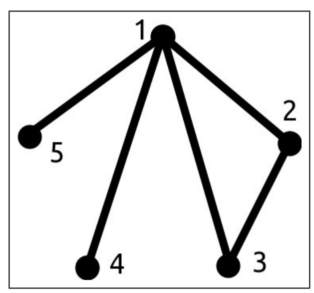
- Debe enviar un vértice de cierto grado d a otro de grado d (el grado de un vértice es el número de aristas que salen de él).
- Si dos vértices están unidos por una artista, sus imágenes por f también.

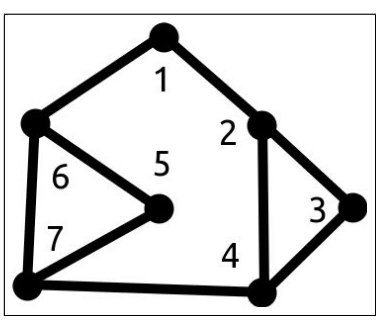
Calcula el grupo de automorfismos de los siguientes grafos, describiendo sus elementos:

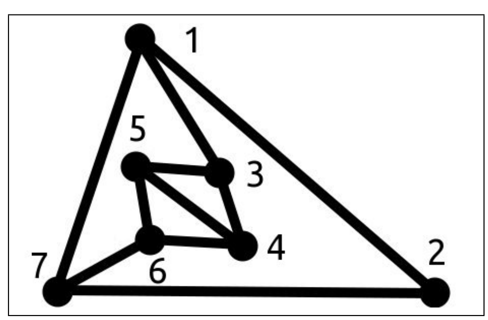












¿Son isomorfos los últimos dos grafos?