ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (14-6-2016)	•	Grado en Matemáticas Curso 2015-2016	•	Examen Extra

SOLUCIONES

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) Un grupo G es abeliano si y sólo si $(xy)^2 = x^2y^2$ para cualesquiera $x, y \in G$.

Solución:

Si G es abeliano entonces $(xy)^2 = xyxy = x^2y^2$. Demostremos ahora el recíproco. Supongamos que tenemos $(xy)^2 = x^2y^2$, entonces se tiene $xyxy = xxyy$. Multiplicamos por x^{-1} a la izquierda y por y^{-1} a la derecha, quedando $yx = xy$, para cualquier par $x, y \in G$. Por lo tanto G es abeliano.

Por lo tanto la afirmación es $\underline{Verdadera}$.

b) La ecuación $3x + 7 = 0$ tiene solución única en $\mathbb{Z}_n$ si y sólo si n es primo.

Solución: La afirmación es _Falsa_. Para ello basta con dar un contraejemplo. Para $n = 4$, no primo, se tiene

$$3x + 7 = 0 \text{ en } \mathbb{Z}_4 \Longleftrightarrow \overline{3}x + \overline{7} \equiv \overline{0} \pmod 4 \Longleftrightarrow \overline{3}x \equiv \overline{1} \pmod 4 \Longleftrightarrow x \equiv \overline{3} \pmod 4,$$

ya que existe 3^{-1} en $\mathbb{Z}_4$ ($3^{-1} \equiv \overline{3} \pmod 4$). Por construcción vemos que x es único. También bastaría con probar con los 4 elementos de $\mathbb{Z}_4$ y ver que la ecuación tiene solución única.

---

2. Para cada grupo G de la siguiente lista, encuentra un subgrupo de S_6 isomorfo a G o demuestra que tal subgrupo no existe: C_5, D_3, C_{20}, $C_3 \times C_3$, $C_2 \times C_4$.

Solución:

Para cada uno de los grupos G de la lista buscamos si existe $H \leq S_6$ tal que $G \simeq H$.

- $G = C_5$: En caso de existir H, será cíclico de orden 5. Es decir, existirá $\sigma \in S_6$ tal que $|\sigma| = 5$. Es decir, σ será un 5-ciclo. Por ejemplo $H = \langle(1\,2\,3\,4\,5)\rangle \simeq C_5$.
- $G = D_3$: Como $D_3 \simeq S_3$ y $S_3 \leq S_6$, tenemos que $H = S_3 = \langle(1\,2\,3), (1\,2)\rangle \simeq D_3$.
- $G = C_{20}$: En caso de existir H, será cíclico de orden 20. Es decir, existirá $\sigma \in S_6$ tal que $|\sigma| = 20$. Pero esto no es posible ya que el orden máximo de una permutación de S_6 es 6. Por lo tanto no existe $H \leq S_6$ tal que $H \simeq C_{20}$.
- $G = C_3 \times C_3$: En caso de existir H, tendremos que existirán $\sigma, \tau \in S_6$ tal que $H = \langle\sigma, \tau\rangle$, $|\sigma| = |\tau| = 3$ y $\sigma\tau = \tau\sigma$. Es decir σ, τ son dos 3-ciclos que conmutan. Por ejemplo $H = \langle(1\,2\,3), (4\,5\,6)\rangle \simeq C_3 \times C_3$.
- $G = C_2 \times C_4$: De forma análoga al caso anterior, existirán $\sigma, \tau \in S_6$ tal que $H = \langle\sigma, \tau\rangle$, $|\sigma| = 2$, $|\tau| = 4$ y $\sigma\tau = \tau\sigma$. Es decir σ es un 2-ciclo y τ es un 4-ciclo que conmutan. Por ejemplo $H = \langle(1\,2), (3\,4\,5\,6)\rangle \simeq C_2 \times C_4$.

---

3. Demuestra que el conjunto $A = \left\{ a + b\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ es un subanillo de $\mathbb{R}$.

<u>*Solución:*</u>

Recordemos la definición de subanillo: Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo y $S \subseteq R$ no vacío. S es un subanillo de R si $(S, +, \cdot)$ es un anillo. O equivalentemente:

(i) $(S, +)$ es un subgrupo de $(R, +)$.

(ii) La operación $\cdot$ es cerrada en S.

Veámoslo en nuestro caso. Tenemos el anillo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, donde las operaciones suma y multiplicación son las habituales de $\mathbb{R}$. Sean $\alpha = a + b\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right), \beta = c + d\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

(i) $(A, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Esto es cierta si $\alpha - \beta \in A$, para todo $\alpha, \beta \in A$:

$$\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \in A,$$

ya que $(a - c), (b - d) \in \mathbb{Z}$.

(ii) La operación $\cdot$ es cerrada en A. Esto es cierta si $\alpha \cdot \beta \in A$, para todo $\alpha, \beta \in A$:

$$\alpha \cdot \beta = ac + 3bd + (bc + ad + bd)\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \in A,$$

ya que $(ac + 3bd), (bc + ad + bd) \in \mathbb{Z}$.

---

4. a) Sea $A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\ \textbf{impares} \right\} \subset \mathbb{Q}$. ¿Es A un ideal de $\mathbb{Q}$?

<u>*Solución 1:*</u>

A no es ideal de $\mathbb{Q}$. No es cerrado para la suma (p.e. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \notin A$), ni cumple la propiedad de ideal para el producto $2\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \notin A$.

<u>*Solución 2:*</u>

Tenemos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo y por lo tanto no tiene ideales propios. Así A no es ideal de $\mathbb{Q}$ ya que $A \neq \mathbb{Q}$ y $A \neq \{0\}$.

b) Sea B el conjunto de polinomios $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(0) = p(2)$. ¿B es un ideal de $\mathbb{C}[x]$?

<u>*Solución:*</u>

B no es ideal de $\mathbb{C}[x]$, ya que falla para la propiedad del producto con cualquier polinomio que cumpla $p(0) = p(2) \neq 0$ y otro $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ que no esté en B. Por ejemplo, $p(x) = 1$, $q(x) = x+1$. Entonces $r(x) := p(x)q(x)$ cumple $r(0) = 1$ y $r(2) = 3$.

---

5. Considera el grupo de permutaciones A_5. *Recuerda que es un grupo simple.*

a) Encuentra cinco subgrupos (distintos de A_5 y de Id) de A_5 de órdenes diferentes.

<u>*Solución:*</u>

El orden de A_5 es $60 = 5 \cdot 4 \cdot 3$, por lo tanto el Teorema de Lagrange nos dice que si $H \leq A_5$ es propio de orden d entonces $d \in \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\}$. Damos cinco ejemplos de ordenes distintos:

- $d = 2$: $H_2 = \langle (1\,2)(3\,4) \rangle$.
- $d = 3$: $H_3 = \langle (1\,2\,3) \rangle$.
- $d = 4$: $H_4 = \langle (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4) \rangle$. Como H_4 tiene dos generadores de orden 2 y conmutan, se tiene que $H_4 \simeq V_4$.
- $d = 5$: $H_5 = \langle (1\,2\,3\,4\,5) \rangle$.
- $d = 12$: $H_{12} = A_4 < A_5$.

Otros dos posibles ejemplos son los siguientes:

- $d = 6$: $H_6 = \langle (1\,2\,3), (1\,2)(4\,5) \rangle$. Sea $\sigma = (1\,2\,3)$ y $\tau = (1\,2)(4\,5)$, entonces $|\sigma| = 3$, $|\tau| = 2$, $\tau\sigma = \sigma^2\tau$. Así una presentación de H_6 será $\langle \sigma, \tau \,|\, \sigma^3 = 1 = \tau^2, \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle$. Por lo tanto, $H_6 \simeq D_3$.
- $d = 10$: $H_{10} = \langle (1\,2\,3\,4\,5), (2\,5)(3\,4) \rangle$. Sea $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$ y $\tau = (2\,5)(3\,4)$, entonces $|\sigma| = 5$, $|\tau| = 2$, $\tau\sigma = \sigma^4\tau$. Así una presentación de H_{10} será $\langle \sigma, \tau \,|\, \sigma^5 = 1 = \tau^2, \tau\sigma = \sigma^4\tau \rangle$. Por lo tanto, $H_{10} \simeq D_5$.

b) ¿Alguno de ellos es isomorfo a un grupo diédrico de orden > 2?

<u>*Solución:*</u>

Podemos descartar los de orden impar y de orden 2, quedando como candidatos $4, 6, 10$ y 12. Hemos visto que $H_4 \simeq V_4$ y sabemos que $V_4 \simeq D_2$. Por lo tanto $H_4 \simeq D_2$. También hemos visto: $H_6 \simeq D_3$ y $H_{10} \simeq D_5$. Por último H_{12} no es isomorfo al único candidato lógico (D_6), al no tener A_4 elementos de orden 6.

c) Demuestra que en A_5 no existen subgrupos de órden 15 ni de órden 30.

<u>*Solución:*</u>

Como todos los grupos de orden 15 son cíclicos, si A_5 tuviera un subgrupo de este orden, debería tener elementos de orden 15. Pero no existe $\sigma \in A_5$ tal que $|\sigma| = 15$, ya que la única posibilidad sería si $\sigma = \sigma_3\sigma_5$ con σ_n n-ciclos, $n = 3, 5$, que conmutan. Pero eso no es posible en A_5 (Si $\sigma \in A_5$ entonces $\sigma = \tau_1\tau_2$ con τ_1, τ_2 2-ciclos, o σ es un 3-ciclos, o σ es un 5-ciclos, por lo que el orden máximo es 5). Obsérvese que de forma análoga se puede demostrar no tiene subgrupos de orden 20 (no se pide en el enunciado).

Por otro lado, si A_5 tuviese un subgrupo de orden 30, éste sería normal ya que sería de índice 2 en A_5. Pero sabemos por el enunciado que eso no puede pasar, ya que si no A_5 no sería simple.

<u>*Observación:*</u> Hemos visto que si $H \leq A_5$ entonces $|H| \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 60\}$.