ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS (8-1-2016) • **Grado en Matemáticas** **Curso 2015-2016** • **Examen Ordinario**

Apellidos, Nombre: ______________________________

Grupo 7__

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	TOTAL
3 puntos	2 puntos	2 puntos	3 puntos	10

◇◇◇◇◇◇ Razonar debidamente las respuestas ◇◇◇◇◇◇

Dispones de 3 horas para hacer el examen.

---

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) (1 punto) La aplicación $F : \mathbb{Z}_{11} \longrightarrow \mathbb{Z}_{11}$ definida por $F(x) = x^{11}$ es un homomorfismo de anillos.

b) (1 punto) Hay 9 grupos abelianos de orden 2000, salvo isomorfismo,

c) (1 punto) El mayor orden que puede tener un elemento de S_{11} es 12.

---

2. Considera el subconjunto de matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}$ definido por

$$A = \{aI + bM : a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{donde} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (0.5 puntos) Demuestra que A es un anillo conmutativo y con unidad, con la multiplicación y suma de matrices.

b) (0.75 puntos) Decide cuáles de los siguientes elementos son divisores de cero y/o unidades en A:

$$2I, \qquad I - M, \qquad 2I - M.$$

c) (0.75 puntos) ¿Es maximal el ideal generado por $3I$?

3. Sea $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ la aplicación dada por $\varphi(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

a) (1 punto) Demuestra que φ es un homomorfismo de grupos.

b) (1 punto) Calcula el núcleo e imagen de φ.

---

4. Considera el subgrupo de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}_3)$ definido como:

$$G = \left\{ m(a,x,y) := \begin{pmatrix} a & \overline{0} & x \\ \overline{0} & a^{-1} & y \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Z}_3, a \in \mathbb{Z}_3^\times \right\}.$$

a) (0.75 puntos) Calcula $|G|$. Encuentra un subgrupo de G de tamaño 3.

b) (0.75 puntos) ¿Tiene G un subgrupo de orden d para cada divisor d de $|G|$?

c) (0.75 puntos) ¿Es G resoluble?

d) (0.75 puntos) ¿Son $m(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1})$ y $m(\overline{-1}, \overline{1}, \overline{0})$ elementos conjugados en G?
