1) (2,5 puntos) En el Banco de Alimentos se ha observado que, desde que comenzó la crisis en 2007, la donación de alimentos crece a un ritmo del $4\,\%$ cada mes.
a) (0.5 puntos) Si durante diciembre de 2007 se donaron 1000 toneladas, escribir una fórmula que calcule el número de toneladas que se donarán durante el mes n a partir de esa fecha.
b) (1 punto) Calcular en qué mes la donación alcanzará (o alcanzó) la cifra de 10.000 toneladas.
c) (1 punto) Determinar el número total de toneladas que habrán sido recogidas por el Banco de Alimentos desde el 1/12/2007 al 31/12/2015.

Solución: (a) Sea $A(n)$ la función que nos da el número de toneladas que se donan en el mes n. Se trata de un modelo de evolución exponencial con dato inicial $y_0 = 1000$ toneladas y razón $r = 1{,}04 = 1 + \frac{4}{100}$ ya que el crecimiento es del $4\,\%$, por lo tanto:

$$A(n) = y_0 \cdot r^n = 1000 \cdot 1{,}04^n.$$

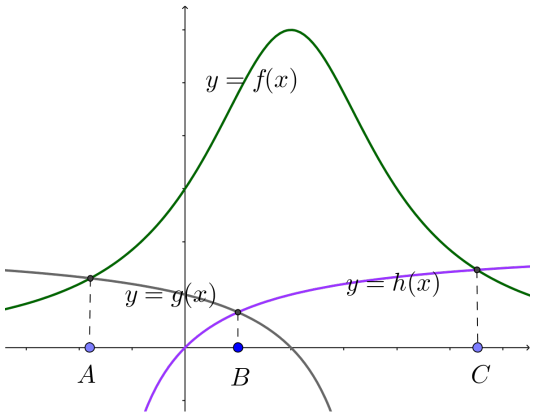
(b) Nos preguntan para que n se tendrá $A(n) = 10000$. Es decir, tenemos que resolver la ecuación exponencial:

$$10000 = 1000 \cdot 1{,}04^n \Longrightarrow 10 = 1{,}04^n \Longrightarrow \log 10 = \log 1{,}04^n \Longrightarrow \log 10 = n \log 1{,}04 \Longrightarrow n = \frac{\log 10}{\log 1{,}04}.$$

Por lo tanto, $n \approx 58{,}7$. Así que las 10000 toneladas se alcanzarán en 59 meses. Aproximadamente en el 1 de diciembre de 2012.
(c) Desde el 1/12/2007 al 31/12/2015 transcurren $96 = 8 \cdot 12$ meses en los que ha crecido las donaciones. Como nos preguntan por el número total de toneladas que han pasado por el Banco de Alimentos, hemos de calcular la suma de las toneladas que se han donado durante esos 96 meses:

$$S = y_0 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = 1000 \frac{(1{,}04)^{97} - 1}{0{,}04} \approx 1097467{,}87.$$

2) (2,5 puntos) a) (1 punto) El gráfico de la derecha contiene la gráfica de tres funciones, f, g y h. Escribe la expresión que permite calcular el área de la región limitada por la gráfica de estas tres curvas.



b) (0.5 punto) La función f está dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-1)^2}.$$

Hallar el valor aproximado (con cuatro decimales) de

$$\int_1^2 f(x)\, dx$$

usando la regla del trapecio con 4 subintevalos.

c) (1 punto) Hallar el valor exacto de la integral anterior.

Solución: (a) Observando el gráfico vemos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $[A, B]$, mientras que $f(x) > h(x)$ en el intervalo $[B, C]$. Además la intersección de $f(x)$ y $g(x)$ se da para $x = A$, y la intersección de $f(x)$ y $h(x)$ se da en $x = C$. Por lo tanto, el área de la región limitada por la gráficas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\int_A^B [f(x) - g(x)]dx + \int_B^C [f(x) - h(x)]dx.$$

(b) Aplicando la regla del trapecio con 4 subintervalos para aproximar la integral definida de la función $f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}$ en el intervalo $[1, 2]$ tenemos $h = \frac{1}{4}$ y $x_0 = 1, x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{7}{4}, x_4 = 2$. Así obtenemos

$$\int_1^2 f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)] = \frac{1}{8}\left(1 + 2\frac{16}{17} + 2\frac{4}{5} + 2\frac{16}{25} + \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}7827.$$

(c) En primer lugar vamos a calcular una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}$:

$$\int \frac{1}{1 + (x-1)^2} dx = \arctan(x-1) + C.$$

Por lo tanto, la regla de Barrow nos dice:

$$\int_1^2 \frac{1}{1 + (x-1)^2} dx = \arctan(2-1) - \arctan(1-1) = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

3) (2,5 puntos) Al comenzar un experimento se tienen 834 millones de bacterias en un cultivo. Denotamos por $N(t)$ el número de bacterias (en millones) después de t horas. Se sabe que las bacterias se reproducen continuamente con un ritmo de crecimiento del $6\,\%$ cada hora.
a) (1 punto) Plantear la ecuación diferencial que modeliza el proceso y resolverla para calcular $N(t)$.
b) (1.5 puntos) Para evitar un crecimiento descontrolado, se aplica un procedimiento químico que elimina 30 millones de bacterias cada hora. Calcular $N(t)$ en este caso resolviendo la nueva ecuación diferencial. ¿Cuál será el número aproximado de bacterias al cabo de 10 horas?

Solución: (a) El ritmo de crecimiento del número de bacterias es del $6\,\%$, es decir que el número de bacterias aumenta a un velocidad del $6\,\%$. Por lo tanto, la ecuación diferencial que modeliza este proceso es de la forma

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}06N.$$

Es una ecuación diferencial de variables separables, así que si ponemos cada una de las variables (junto con su diferencial) en cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{dN}{N} = 0{,}06dt \Longrightarrow \int \frac{dN}{N} = \int 0{,}06dt \Longrightarrow \log|N| = 0{,}06t+C \Longrightarrow e^{\log|N|} = e^{0{,}06t+C} \Longrightarrow |N| = e^{0{,}06t+C}.$$

Ahora, como $e^{0{,}06t}K > 0$ (donde $K = e^C$) se tiene que $N(t) = Ke^{0{,}06t}$. Para determinar el valor exacto de la constante K utilizamos el dato inicial: $N(0) = 834$. Entonces $K = 834$. Así concluimos:

$$N(t) = 834e^{0{,}06t}.$$

(b) En este caso tenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}06N - 30.$$

Aplicando las mismas ideas que antes, debido a que es una ecuación diferencial de variables separables, obtenemos:

$$\frac{dN}{0{,}06N-30} = dt \Longrightarrow \int \frac{dN}{0{,}06N-30} = \int dt \Longrightarrow \frac{1}{0{,}06}\log|0{,}06N-30| = t + C$$
$$\Longrightarrow e^{\log|0{,}06N-30|} = e^{0{,}06(t+C)} \Longrightarrow |0{,}06N-30| = e^{0{,}06(t+C)}$$
$$\Longrightarrow 0{,}06N - 30 = e^{0{,}06(t+C)} \Longrightarrow N(t) = Ke^{0{,}06t} + 500.$$

Utilizando el dato inicial $N(0) = 834$ obtenemos $K = 834 - 500 = 334$. Concluyendo:

$$N(t) = 334\,e^{0{,}06t} + 500.$$

Así, $N(10) \approx 1108{,}59$.

4) (2,5 puntos) Una ameba se mueve en un área en el que la concentración de adenosina monofosfato (AMP) viene dada por la función

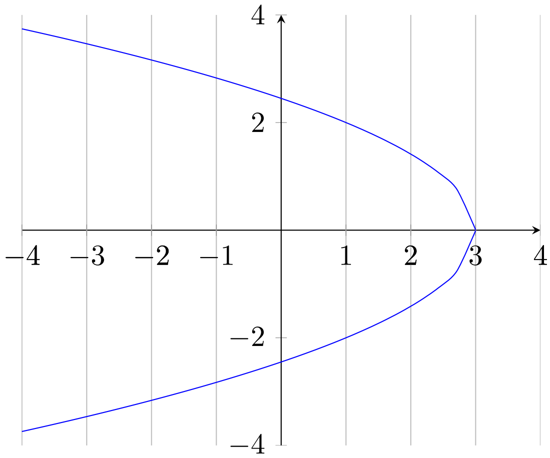
$$f(x,y) = \frac{4}{2x+y^2+2}.$$

a) (0.5 puntos) Calcular la concentración de AMP en el punto $A = (1,2)$.
b) (1 punto) Hallar, identificar y dibujar la curva de nivel de esta función que pasa por el punto $A = (1,2)$.
c) (0.5 puntos) Si la ameba se moviera horizontalmente hacia la derecha desde $A = (1,2)$, ¿percibiría aumento o disminución de la concentración de AMP? Justificar la respuesta.
d) (0.5 puntos) De nuevo desde $A = (1,2)$, ¿en qué dirección se moverá si lo hace siguiendo la dirección en que la concentración de AMP aumenta con más rapidez?

Solución: (a) $f(1,2) = \frac{1}{2}$.
(b) La curva de nivel que pasa por $(1,2)$ es la curva de nivel $f(1,2)$. Es decir:

$$\frac{4}{2x+y^2+2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 8 = 2x+y^2+2 \Longrightarrow x = 3 - \frac{y^2}{2}.$$

Es decir, una parábola centrada en el punto $(3,0)$ abierta hacia el eje X negativo:



(c) Si la ameba se mueve hacia la derecha, lo hará en la dirección del vector $(1,0)$. Por lo tanto la variación de la función $f(x,y)$ en esa dirección vendrá regida por la derivada parcial respecto de x en el punto correspondiente, en este caso el punto $(1,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-8}{(2x+y^2+2)^2} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{-1}{8}.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) < 0$, obtenemos que si la ameba se mueve horizontalmente hacia la derecha desde el punto $(1,2)$, la concentración de AMP disminuye.

(d) La concentración de AMP viene dada por la función de dos variable $f(x,y)$. Por lo tanto, la dirección de máximo crecimiento de la concentración a partir del punto $(1,2)$, viene dada por el gradiente de $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{-8}{(2x+y^2+2)^2}, \frac{-8y}{(2x+y^2+2)^2}\right) \Longrightarrow \nabla f(1,2) = \left(\frac{-1}{8}, \frac{-1}{4}\right).$$

Así la ameba tendrá que moverse en la dirección del vector $\left(\dfrac{-1}{8}, \dfrac{-1}{4}\right)$.