

Grupos IX: Acción de un grupo en un conjunto.

1. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Decimos que G actúa en X si existe un homomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow S_X$. Para cada $x \in X$ definimos

- $\text{orb}_G(x) := \{\phi(g)(x) : g \in G\}$, la *órbita de x por G* .
- $\text{St}_G(x) := \{g \in G : \phi(g)(x) = x\}$, el *estabilizador de x por G* .

Demostrar:

a) Sean $x, y \in X$, definimos la relación $x \sim y$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $x = \phi(g)(y)$. Demostrar que esta relación es de equivalencia. En particular, las órbitas de elementos de X constituyen una partición de X .

b) $\text{St}_G(x)$ es un subgrupo de G .

c) **Teorema Órbita-Estabilizador.** Sea X un conjunto no vacío y G un grupo que actúa en X .

Entonces para cada $x \in X$ se tiene $|G| = |\text{orb}_G(x)| \cdot |\text{St}_G(x)|$.

2. **Teorema de Conteo de Órbitas.** Sea X un conjunto finito, G un grupo y $\phi : G \rightarrow S_X$ homomorfismo de grupos. El número de órbitas diferentes en X por G es igual a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}_X(g)|$$

donde $\text{fix}_X(g) = \{x \in X : \phi(g)(x) = x\}$, es decir, el conjunto de elementos de X fijados por g .

Demostrar el Teorema dando los siguientes pasos:

a) Sea $V = \{(g, x) \in G \times X : \phi(g)(x) = x\}$. Demuestra que

$$|V| = \sum_{g \in G} |\text{fix}_X(g)| \quad \text{y} \quad |V| = \sum_{x \in X} |\text{St}_G(x)|.$$

b) $\text{orb}_G(x) = \text{orb}_G(y)$ para todo $x \in \text{orb}_G(y)$.

c) Usa el Teorema Órbita-Estabilizador para demostrar que

$$\sum_{x \in \text{orb}_G(y)} |\text{St}_G(x)| = |G| \quad \text{para todo } y \in X.$$

d) A partir de los dos apartados anteriores demuestra el Teorema de Conteo de Órbitas.

3. Sea $G := \{(1), (132)(465)(78), (132)(465), (123)(456), (123)(456)(78), (78)\} \leq S_8$.

a) Calcula $\text{St}_G(i)$ y $\text{orb}_G(i)$ para $i \in \{1, 2, 4, 7\}$.

b) Calcula el número de órbitas diferentes en $\{1, \dots, 8\}$ por G .

4. Un juego infantil tiene pentágonos con cada arista pintada de azul, verde o rojo. Usa el Teorema de conteo de órbitas para ver cuántos pentágonos diferentes podría tener el juego como máximo.