Grupos II: Subgrupos; Teorema de Lagrange.

1. Calcula los elementos y la tabla de multiplicación del subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Este grupo se llama el grupo de cuaterniones. Calcula su retículo de subgrupos.

2. Sea H un subconjunto no vacío de un grupo $(G, *)$. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes dos a dos.

a) El subconjunto H es un subgrupo de G, es decir, $H \leq G$;

b) $HH = H$ y $H^{-1} = H$, es decir:

$$\{h * h' : h, h' \in H\} = H \qquad \text{y} \qquad \{h^{-1} : h \in H\} = H.$$

c) El subconjunto H es cerrado con la operación $*$ y todo elemento de H tiene su opuesto en H, es decir, $HH \subseteq H$ y $H^{-1} \subseteq H$.

3. El caso especial en el que H es finito. Sea H un subconjunto no vacío de un grupo $(G, *)$. Demuestra que si $|H| < \infty$ entonces cualquiera de las afirmaciones del ejercicio anterior es equivalente a que $HH \subset H$. Es decir:

> *Si H es finito, entonces para que H sea un subgrupo de G es* **suficiente** *con que la operación $*$ sea cerrada en H.*

Demuestra, dando un contraejemplo, que la condición anterior puede no ser suficiente si H es infinito.

4. El centro de un grupo. Demuestra que

$$Z(G) = \{x \in G : \ xy = yx \ \forall y \in G\}$$

es un subgrupo de G. Este subgrupo recibe el nombre de *centro de G*.

a) Calcula el centro de D_3, $Z(D_3)$.

b) Calcula el centro de D_4, $Z(D_4)$.

c) Si G es conmutativo, ¿cuál es su centro?

5. El centralizador de un elemento. Sea $a \in G$. Demuestra que

$$C_G(a) = \{x \in G : \ xa = ax\}$$

es un subgrupo de G. Este subgrupo recibe el nombre de *centralizador de a en G*.

a) Demuestra que $Z(G) \leq C_G(a)$.

b) Calcula $C_{D_4}(B)$.

c) Concluye que la inclusión $Z(G) \leq C_G(a)$ puede ser estricta.

6. Sea $H \leq G$ y sean $x, y \in G$. Demuestra que:

a) $xH = H$ si y sólo si $x \in H$;

b) $xH = yH$ si y sólo si $y^{-1}x \in H$;

c) $xH \cap yH \neq \emptyset$ si y sólo si $xH = yH$;

d) Si H es finito entonces $|H| = |Hx|$.

7. Calcula las clases a la derecha y a la izquierda del subgrupo de los múltiplos de 4 en $\mathbb{Z}$.

8. Sea $\tau = (23) \in S_3$ la permutación que intercambia 2 y 3. Escribe clases de equivalencia a derecha e izquierda del subgrupo $K = \{Id, \tau\}$ de S_3. Comprueba si $K\gamma = \gamma K$ para cualquier $\gamma \in S_3$.

9. Observa que S_3 tiene un único subgrupo de orden 3. Repite el ejercicio anterior con el subgrupo de orden 3 de S_3.

10. Sea H el subgrupo de S_4 cuyos elementos fijan a 4. Describe las clases de equivalencia a derecha e izquierda de H en S_4.

11. Encuentra todas las clases de equivalencia a la izquierda del subgrupo $\{\overline{1}, \overline{11}\}$ en $U(30)$.

12. Sea $\mathbb{C}^*$ el grupo de los complejos no nulos con el producto, y sea

$$H = \{a + bi : a^2 + b^2 = 1\}.$$

a) Demuestra que H es un subgrupo de $\mathbb{C}^*$.

b) Da una descripción geométrica de las clases de equivalencia a izquierda de H en $\mathbb{C}^*$.

13. Sea G un grupo cíclico de orden 18. Encuentra el número de elementos que generan el grupo.

14. Un grupo G tiene dos subgrupos distintos H y K de orden 31. Demuestra que $H \cap K = \{1\}$.

15. Supongamos que $|G| = 33$. Demuestra que G contiene un elemento de orden 3.

16. Supongamos que $|G| = 8$. Demuestra que G contiene un elemento de orden 2.

17. Sea G un grupo de orden 8. Probar que G es cíclico o $a^4 = 1$ para cualquier $a \in G$.

18. Supongamos que G es un grupo abeliano de orden impar. Demuestra que el producto de todos los elementos de G da como resultado la identidad.