Grupos X: Clases de Conjugación de subgrupos. Normalizadores.

Clases de conjugación de un subgrupo

1. Sea G un grupo, $H \leq G$. Denotamos por $\mathrm{cl}_G(H) = \{xHx^{-1} : x \in G\}$ la clase de conjugación de H en G.

a) Calcula $\mathrm{cl}_{D_6}(\langle a \rangle)$, $\mathrm{cl}_{D_6}(\langle a^3, b \rangle)$, $\mathrm{cl}_{D_6}(\langle a^2 \rangle)$, con a el giro de $2\pi/6$ radianes y b una reflexión.

b) Calcula $\mathrm{cl}_{S_4}(\langle (123) \rangle)$, $\mathrm{cl}_{A_4}(\langle (123) \rangle)$ y $\mathrm{cl}_{Q_8}(\langle -1 \rangle)$.

c) Demuestra que H es normal en G si y sólo si $\mathrm{cl}_G(H) = \{H\}$.

Normalizador de un subgrupo

2. Sea G un grupo, $H \leq G$. Denotamos por $\mathrm{N}_G(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$ el normalizador de H en G.

a) Demuestra que $H \leq N_G(H) \leq G$ y que $N_G(H) = G$ si y sólo si H es normal en G.

b) Demuestra que $N_G(H)$ es el subgrupo K de G más grande que contiene a H tal que H es normal en K.

c) Sea G finito, con algún subgrupo no trivial. Demuestra que si para todo subgrupo H de G, $H \neq G$, se cumple que $N_G(H) \neq H$, entonces G contiene un subgrupo normal no trivial.

3. Calcula $\mathrm{N}_{S_3}(H)$ para todo $H \leq S_3$.

4. Calcula

$$\mathrm{N}_{D_6}(\langle a^3, b \rangle), \qquad \mathrm{N}_{A_4}(\langle (123) \rangle), \qquad \mathrm{N}_{Q_8}(\langle -1 \rangle), \qquad \mathrm{N}_{S_4}(\langle (1234) \rangle.$$

Comprueba que en esos casos se cumple la fórmula $|\mathrm{cl}_G(H)| = |G|/|\mathrm{N}_G(H)|$.

5. Sea G un grupo y $X := \{H \leq G\}$ el conjunto formado por los subgrupos de G. Sean $H, K \leq G$, definimos la relación $H \sim K$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $K = gHg^{-1}$. Esto es, si H y K son conjugados.

a) Demostrar que esta relación es de equivalencia. En particular, las clases de equivalencia (i.e. las clases de conjugación) constituyen una partición de X.

b) $|G| = |\mathrm{cl}_G(H)| \cdot |N_G(H)|$, para $H \leq G$.