ÁLGEBRA LINEAL

(Examen Extraordinario)

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Examen
10-6-2013

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

Grupo
_1_

Ejercicio 1	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**Ejercicio 4**	**FINAL**
3 puntos	2 puntos	3 puntos	2 puntos	10

◇◇◇◇◇◇ Razonar debidamente las respuestas ◇◇◇◇◇◇

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) El conjunto $M = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$.

(ii) Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ el subespacio diagonal de $\mathbb{R}^3$ y $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ la base estándar. Escribimos $[v]$ para la clase de v en $\mathbb{R}^3/D$. Entonces las clases $[e_1], [e_2]$ forman una base de $\mathbb{R}^3/D$ y la clase de $(1, 2, 3)$ se escribe con respecto a esta base como $[(1, 2, 3)] = -2[e_1] - [e_2]$.

(iii) Sean $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (1, 0, 3), u_3 = (0, 1, 5) \in \mathbb{R}^3$, de modo que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$. Entonces la base dual $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$ esta definida por las siguientes formas lineales

$$u_1^*(x, y, z) = 3x + 5y - z, \quad u_2^*(x, y, z) = -2x - 5y + z, \quad \text{y} \quad u_3^*(x, y, z) = y.$$

Problema 2. Denotemos por $\mathbb{R}_3[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que tres junto con el polinomio 0 y sea $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 + (b + c + d)x^2 + (2b + c)x + (a + b + c + d).$$

(i) Calcula la matriz de f con respecto a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ y la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

(ii) Calcula una base de $Ker(f)$ y una base de $Im(f)$. Comprueba que se cumple el Teorema de la dimensión.

(iii) Sea $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = p'(0) = 0\}$. Calcula una base de $W \cap Im(f)$.

(iv) Demuestra que $W + Im(f)$ es $\mathbb{R}_3[x]$.

Problema 3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio mínimo es $x^2(x-1)$.

(i) Calcula los autovalores y autovectores de A.

(ii) Determina si A es diagonalizable o no.

(iii) Determina la forma canónica de Jordan J de A.

iv) Si J tiene coeficientes racionales, encuentra una base de $\mathbb{Q}^4$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{Q}^4$ definido por A tenga matriz de Jordan J y una matriz P tal que $AP = PJ$.

Problema 4. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Llamaremos *simetrías* a los endomorfismos $s : V \longrightarrow V$ tales que $s \circ s = I$, donde I es el endomorfismo identidad en V. Sea $s : V \longrightarrow V$ una simetría. Demuestra que:

(i) s es un isomorfismo.

(ii) $Im(s - I) \subset Ker(s + I)$.

(iii) $V = Ker(s - I) \oplus Ker(s + I)$. [Sugerencia: $v = \frac{v+s(v)}{2} + \frac{v-s(v)}{2}$.]

(iv) $Im(s - I) = Ker(s + I)$.