ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Hoja nº 6

Aplicaciones Lineales.

1. Sean f y g dos aplicaciones lineales. Demostrar:

(i) $Ker(f) \cap Ker(g) \subset ker(f+g)$.

(ii) Si $Im(f) \cap Im(g) = \{0\}$, entonces $Ker(f) \cap Ker(g) = ker(f+g)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada. Demuestra que f es lineal, escribe su matriz respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ y describe su núcleo y su imagen.

3. Sea $f : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = (a+b) + (c+c')x + (a'+b')x^2$$

(i) Calcular $Ker(f)$.

(ii) Demostrar que la expresión $\overline{f}([v]) = f(v)$ define un isomorfismo entre el espacio cociente $M_{2\times 3}(\mathbb{R})/W$ y $\mathbb{R}_2[x]$, donde $W = Ker(f)$.

(iii) Decidir si esta misma expresión define un homomorfismo cuando W es el subespacio generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Probar que el homomorfismo $f : V_1 \to V_2$ induce un homomorfismo $\overline{f} : V_1/W \to V_2 \Leftrightarrow W \subset Ker(f)$

4. Sea $f : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ el endomorfismo definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{pmatrix}$$

y W el subespacio del apartado (iii) del ejercicio anterior. Demostrar que f induce un endomorfismo $\overline{f}$ del espacio cociente $M_{2\times 3}(\mathbb{R})/W$. Calcular su matriz respecto de alguna base.

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V.

(i) Demostrar que la aplicación canónica $\pi : V \to V/W$ definida por $\pi(v) = [v]$ es un epimorfismo. Calcular su núcleo y aplicar el primer teorema de isomorfía.

(ii) Demostrar que existen bases de V y de V/W respecto de las cuales la matriz de π es de la forma $(0_{m\times n}|I_m)$ para ciertos enteros m, n. ¿Qué representan m y n?

6. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(p(X)) = p(i)$.

(i) Demostrar que f es un homomorfismo suprayectivo entre espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

(ii) Demostrar que $Ker(f) = \{(x^2+1)p(x) \mid p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. (Sugerencia: habrá que dividir por X^2+1).

(iii) Concluir que se tiene un isomorfismo

$$\mathbb{R}[x]/Ker(f) \overset{\sim}{\longmapsto} \mathbb{C}$$

(iv) Dar bases de los espacios vectoriales reales $\mathbb{R}[x]/Ker(f)$ y $\mathbb{C}$ respectivamente.