ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Examen
27-11-2012

Apellidos, Nombre: ______________________________

Razonar debídamente las respuestas ◇◇◇

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	FINAL
4 puntos	4 puntos	2 puntos	10

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{Q})$ tal que:

$$f(1+x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(1+2x+3x^2) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f(x+2x^2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ una aplicación lineal y $\{u_1, u_2, u_3.u_4\}$ una base de $M_2(\mathbb{R})$. Entonces $\{f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)\}$ es base de $\mathbb{R}_3[x] \iff f$ es un isomorfismo.

(iii) Existe un valor $a \in \mathbb{F}_2$ para el que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{F}_2)$ tiene inversa.

(iv) Sea V un K-espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita), $W \subset V$ un subespacio y C un subespacio complementario de W en V. Entonces el K-espacio vectorial V/W es isomorfo a C.

Problema 2. Sea $F : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal definida por

$$F(p(x)) = 2p'(x) - p(2)x^2.$$

(i) Demuestra que F es lineal y calcula su matriz con respecto a una base $\mathbb{R}_3[x]$. Puedes elegir la base que quieras, pero debes indicar qué base es.

(ii) Encuentra bases de $Ker(F)$ e $Im(F)$ y comprueba que se cumple el Teorema de la dimensión.

(iii) Calcula la matriz del isomorfismo canónico $\overline{F} : \mathbb{R}_3[x]/Ker(F) \xrightarrow{\sim} Im(F)$ con respecto a algunas bases. Indica qué bases has elegido.

Problema 3. Demuestra que $\{(1,i,0,0), (0,1,i,0), (0,i,1,0), (0,0,i,1)\}$ es una base de $\mathbb{C}^4$ y calcula $det(f)$ donde $f : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ es el endomorfismo definido por

$$f(1,i,0,0) = (1,1,0,0), \quad f(0,1,i,0) = (1,2,3,4), \quad f(0,i,1,0) = (1,0,1,0), \quad f(0,0,i,1) = (1,-1,1,-1).$$