ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2012–13

Examen
26-11-2012

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	FINAL
Razonar debídamente las respuestas ◇◇◇				
	4 puntos	4 puntos	2 puntos	10

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Si $u, v \in \mathbb{R}^2$ son linealmente independientes, entonces $f(u), f(v) \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes.

(ii) Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ una aplicación lineal. Entonces la imagen de cualquier base de $M_2(\mathbb{R})$ forma una base de $\mathbb{R}_3[x]$ ya que $dim\, M_2(\mathbb{R}) = dim\, \mathbb{R}_3[x]$.

(iii) Sea $f : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal determinada por $f(4+x) = (1,0)$, $f(-x) = (0,-11)$ y $f(4) = (1,-10)$. Entonces la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{R}_1$ y de $\mathbb{R}^2$ es $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -2/5 & 11 \end{pmatrix}$

(iv) La matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ es invertible para cualquier valor de a distinto del cero.

Problema 2. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & p(3) \\ p(2) & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcular la matriz de f con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Calcular una base de $Ker(f)$ e $Im(f)$. Comprueba que se cumple el Teorema de la dimensión.

(iii) Si $\mathcal{B}_1$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ que se obtiene de completar una base de $Ker(f)$ y $\mathcal{B}_2$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$ que se obtiene de completar una base de $Im(f)$, calcular la matriz $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(f)$.

(iv) Calcular la matriz del isomorfismo canónico $\overline{f} : \mathbb{R}_2[x]/Ker(f) \longrightarrow Im(f)$ con respecto a algunas bases.

Problema 3. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ las bases de $M_2(\mathbb{C})$ definidas por

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y $f : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ el endomorfismo cuya matriz en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es:

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular $det(f)$.