ÁLGEBRA 2

(Examen Ordinario)

Grado en Físicas
Curso 2012–13

Examen
6-5-2013

Apellidos, Nombre: ______________________________

Razonar debídamente las respuestas ◇◇◇◇◇

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	FINAL
3 puntos	3 puntos	4 puntos	10

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuyo polinomio característico es $p_f(x) = -x(x-1)(x-2)$. Entonces f puede ser diagonalizable o no.

(ii) Sea Q una forma cuadrática cuyo polinomio característico es $p_Q(x) = x^4(x^2-1)$. Entonces el rango de Q es 2 y su signatura es $(1,0)$.

(iii) Consideramos el producto escalar $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3).$$

Sea W el plano de ecuación $x - z = 0$. Entonces la proyección ortogonal del vector $(1,1,1)$ sobre $W^\perp$ es $(1,2,3)$.

Problema 2. Dadas las siguientes formas bilineales en $\mathbb{R}^3$

$$\psi_1((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = x_1x_2 - y_1y_2 + 3x_2z_1 + 2y_2z_1 + 3x_1z_2 + 2y_1z_2$$

$$\psi_2((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

se pide:

(i) Calcular la matrices con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de cada una de las formas bilineales anteriores.

(ii) Calcular las signatura correspondientes a cada una de las formas cuadráticas asociadas a las formas bilineales anteriores.

(iii) Sólo una de las dos formas bilineales anteriores define un producto escalar. ¿Cuál de ellas?. Denotemos por $\langle\ ,\ \rangle$ dicho producto escalar. Calcular una base ortonormal del subespacio ortogonal con respecto al producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3z = 0, \\ 3x + 2y + 14z = 0. \end{cases}$$

Problema 3. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$), definimos la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R} = \{(0,0,0); \mathcal{B}_c\}$ (donde $\mathcal{B}_c$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$) es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que la aplicación lineal $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es ortogonal.

(ii) Calcular la forma de Jordan o Jordan real de g.

(iii) Clasificar geométricamente g.

(iv) Demostrar que f es un movimiento y clasificarlo encontrando sus elementos geométricos.