ÁLGEBRA 2

(19-4-2013)

Grado en Físicas
Curso 2012–13

Hoja nº 5

Forma de Jordan.

1. Calcular la base de Jordan (real) y la forma de Jordan (real) para cada una de las siguientes matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0&2\\-2&4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}5&-1\\4&1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}4&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&0\\3&1&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&-2&1\\-1&-3&2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\-1&-2&3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\3&-6&4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3&2&-2\\0&4&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}-2&0&-1\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&-2\\1&3&1\\1&0&3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&-1&0\\0&1&-3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2&-1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}0&3&1\\2&-1&-1\\-2&-1&-1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&-1\\-2&3&2\end{pmatrix}.$$

2. Estudiar, según los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, la forma de Jordan (real) de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix}a&b&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&-2&6\\0&a&4-a\\0&a&-a\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&b&0\\a&0&0\end{pmatrix}.$$

3. Sea $a \in \mathbb{R}$ y n un entero positivo. Demostrar las siguientes igualdades:

$$\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix}a&1&0\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\\0&a^n&na^{n-1}\\0&0&a^n\end{pmatrix}.$$

4. Sea r_α la rotación de ángulo α en el plano $\mathbb{R}^2$ (resp. la rotación de ángulo α en el espacio $\mathbb{R}^3$ alrededor del eje Z). Estudiar para que ángulos $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) r_α es diagonalizable,

(ii) r_α tiene forma de Jordan,

(iii) r_α tiene forma de Jordan real.

5. Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ y J su forma de Jordan (real). Determinar la forma de Jordan de $B = -A$.

6. Demostrar que la forma de Jordan de un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es única (salvo el orden de las cajas de la diagonal).

7. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y definamos los endomorfismos $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definido por $f(v) = Av^t$ y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $g(v) = Av^t$.

(i) Demostrar que si $v = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio con valor propio $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ de f , entonces $\overline{v} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n) = (x_1 - iy_1, \ldots, x_n - iy_n)$ es vector propio de f de autovalor $\overline{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$.

(ii) Sean $u_1 = (x_1, \ldots, x_n), u_2 = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que el subespacio vectorial $V = \langle u_1, u_2\rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ es invariante por el endomorfismo g. Demostrar que la matriz del endomorfismo g restringido a V respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es $\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\-\lambda_2&\lambda_1\end{pmatrix}$.