ÁLGEBRA 2 (4-3-2013)	**Grado en Físicas** **Curso 2012–13**	**Hoja nº 4**

Formas bilineales y cuadráticas.

1. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean $f_1, \dots, f_k : V \longrightarrow \mathbb{R}$ formas lineales linealmente independientes y $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq k$. Para $u, v \in V$ definimos

$$\phi(u,v) = \sum_{1 \leq i,j \leq k} \lambda_{i,j} f_i(u) f_j(v).$$

(i) Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica si y sólo si $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$, para $1 \leq i, j \leq k$.

(ii) Demuestra que no toda forma bilineal se puede expresar de la forma anterior.

2. Recordemos que dos matrices A y B son congruentes si existe una matriz invertible P tal que $B = P^t A P$. Demostrar que $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango} B$.

3. Sea V un K-espacio vectorial, y $f, g : V \longrightarrow K$ aplicaciones lineales.

(i) Probar que la aplicación $\phi : V \times V \longrightarrow K$ definida por $\phi(u,v) = f(u)g(v)$ es una forma bilineal.

(ii) Estudiar el rango y la inercia de la forma bilineal ϕ.

4. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\phi : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal. Diremos que ϕ es antisimétrica si $\phi(u,v) = -\phi(v,u)$. Demostrar que ϕ es antisimétrica si y sólo si $\phi(u,u) = 0$ para $u \in V$.

5°. Toda forma bilineal ϕ se puede descomponer como la suma de una forma bilineal simétrica y una antisimétrica.

6°. Diagonalizar en una base ortonormal las siguientes formas cuadráticas:

$$\begin{aligned}
Q_1(x,y) &= -2x^2 + y^2 + 4xy \\
Q_2(x,y,z) &= x^2 + y^2 - 2xz + 2yz \\
Q_3(x,y,z) &= x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + 2yz \\
Q_4(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 4xz \\
Q_5(x,y,z) &= xy + yz + zx \\
Q_6(x,y,z,t) &= x^2 + 4xt + 4y^2 + 4yz + z^2 + 4t^2
\end{aligned}$$

Encontrar el carácter de las anteriores formas cuadráticas y estudiar si son equivalentes.

7. Sea V un K-espacio vectorial, $\phi : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal y $Q : V \longrightarrow K$ la forma cuadrática asociada a ϕ (es decir, $Q(u) = \phi(u,u)$ para $u \in V$). Demostrar que existe una única forma bilineal simétrica $\tilde{\phi} : V \times V \longrightarrow K$ tal que $Q(u) = \tilde{\phi}(u,u)$ para $u \in V$. A la forma bilineal $\tilde{\phi}$ se le conoce con el nombre de forma polar de Q

8°. Aplicar el método de completar cuadrados de Gauss a las siguientes formas cuadráticas:

$$\begin{aligned}
Q_1(x,y,z) &= x^2 + 5y^2 - 2xy + 2xz \\
Q_2(x,y,z) &= xy + 2xz \\
Q_3(x,y,z) &= x^2 - z^2 - 2xy + xz \\
Q_4(x,y,z) &= 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz - 2yz \\
Q_5(x,y,z) &= 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz
\end{aligned}$$

Encontrar el carácter de las anteriores formas cuadráticas y estudiar si son equivalentes.

9. Dadas las siguientes formas cuadráticas y los siguientes valores de D:

$$\begin{array}{rclcl} Q_1(x,y) & = & x^2+xy+y^2 & \text{y} & D_1=2. \\ Q_2(x,y) & = & x^2+4xy+y^2 & \text{y} & D_2=1. \\ Q_3(x,y) & = & -2x^2+4xy+y^2 & \text{y} & D_3=-8. \\ Q_4(x,y) & = & 2x^2+2xy+y^2 & \text{y} & D_4=1. \\ Q_5(x,y) & = & x^2+4xy+4y^2 & \text{y} & D_5=4. \end{array}$$

se pide para $i=1,\ldots,5$:

(i) Estudiar las cónicas definidas por $Q_i(x,y)=D_i$ y $Q_i(x,y)=-D_i$.

(ii) Escribir los cambios de coordenadas que diagonalizan en una base ortonormal la formas cuadráticas Q_i y comprobar que siempre se puede conseguir que el cambio de coordenadas corresponda a un giro.

(iii) Observar que el signo del determinante de las anteriores formas cuadráticas cuyas curvas de nivel estamos estudiando decide si la curva es una elipse o una hipérbola. Demuestra por qué.

10°. Estudiar para que valores de a las siguientes formas cuadráticas son definidas positivas, definidas negativas o indefinidas y hallar los índices de inercia en función de a.

$$\begin{aligned} Q_1(x,y,z) &= ax^2+y^2+z^2+2axy+2a^2xz+2ayz \\ Q_2(x,y,z) &= ax^2+2xy+ay^2+2ayz+2az^2 \\ Q_3(x,y,z) &= x^2+a(a-1)y^2+2axy+2xz+4ayz \\ Q_4(x,y,z) &= x^2+2xy+ay^2+2xz+2ayz+3z^2 \\ Q_5(x,y,z) &= 5x^2+y^2+az^2+4xy-2xz-2yz \\ Q_6(x,y,z) &= x^2+4y^2+z^2+2axy+10xz+6yz \\ Q_7(x,y,z) &= x^2+4y^2+z^2+2axy+2ayz \\ Q_8(x,y,z) &= (a+1)x^2+(a+1)y^2+az^2+2xy-2ayz \\ Q_9(x,y,z) &= ax^2+2xy+ay^2+2ayz+2az^2 \end{aligned}$$

11°. Diagonalizar simultaneamente los siguientes pares de formas cuadráticas :

(i) $Q(x,y)=x^2+26y^2+10xy$ y $Q'(x,y)=x^2+56y^2+16xy$.

(ii) $Q(x,y)=-4xy$ y $Q'(x,y)=x^2+2xy+2y^2$.

(iii) $Q(x,y,z)=x^2-8xy-4y^2+10xz+4yz+4z^2$ y $Q'(x,y,z)=6x^2+8xy+4y^2-2xz-4yz+2z^2$.

(iv) $Q(x,y,z)=-2x^2-4xy-2y^2+2xz+2yz-z^2$ y $Q'(x,y,z)=4x^2+4xy+2y^2-2xz-2yz+z^2$.

12°. Dadas las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ll} \phi_1 : \mathbb{R}_4[x]\times\mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}, & \phi_1(p,q)=p(1)q(-1)+p(-1)q(1). \\ \phi_2 : M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, & \phi_2(A,B)=\text{traza}(AMB^t), \quad \text{donde } M\in M_2(\mathbb{R}) \text{ esta fijada.} \end{array}$$

se pide para $i=1,2$:

(i) Probar que ϕ_i es una forma bilineal.

(ii) Determinar el rango y la inercia de la forma cuadrática Q_i asociada a ϕ_i.

13. Determinar los valores $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ para los que la forma cuadrática

$$\phi(x,y,z,t)=x^2+3y^2-4z^2+\lambda t^2+2\mu xy$$

es degenerada. Calcular el rango y la inercia de ϕ en función de λ,μ.