ÁLGEBRA 2

(8-2-2013)

Grado en Físicas
Curso 2012–13

Hoja nº 1

Espacios euclídeos

1°. Estudiar si las siguientes aplicaciones definen productos escalares en los correspondientes espacios vectoriales:

(i)	$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,	$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$,
(ii)	$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}$,	$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$,
(iii)	$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,	$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$,
(iv)	$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$,	$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=1}^{3} p(k)q(k)$,

donde $\mathbb{R}_2[x]$ denota el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y grado ≤ 2.

2. Demostrar que en un espacio euclídeo V, dos vectores $u, v \in V$ tienen la misma norma si y sólo si $u + v$ y $u - v$ son ortogonales.

3. Sean V_1 y V_2 K-espacios vectoriales, $\langle\ ,\ \rangle$ un producto escalar en V_1 y $f : V_2 \longrightarrow V_1$ una aplicación lineal. Se define $\psi : V_2 \times V_2 \longrightarrow K$ la aplicación $\psi(u, v) = \langle f(u), f(v) \rangle$. Demostrar que ψ es un producto escalar en V_2 si y sólo si f es inyectiva.

4°. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio euclídeo. Demuestra que para todo $u, v \in V$ se tiene:

(i) $2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2$ (*Ley del paralelogramo*).

(ii) $4\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$ (*Identidad de polarización*).

(iii) $2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$.

5. Sea $\mathcal{C}([-1, 1])$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$. Se pide:

(i) Demostrar que la aplicación $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ define un producto escalar en $\mathcal{C}([-1, 1])$.

(ii) Probar que las funciones $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ son ortogonales con respecto al producto escalar anterior.

6. Sea $\mathcal{C}([-1, 1])$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$. Se pide:

(i) Demostrar que la aplicación $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ define un producto escalar en $\mathcal{C}([-1, 1])$.

(ii) Calcular las longitudes y el ángulo que forman las funciones e^x y e^{-x}.

(iii) Demostrar que el conjunto $\{1/\sqrt{2}\} \cup \{\mathrm{sen}(nx)\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\cos(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal con respecto al producto escalar anterior.

7°. Sea $M_n(\mathbb{Q})$ el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de la matrices cuadradas de orden n. Demostrar

(i) La aplicación $\langle A, B \rangle = \mathrm{traza}(AB^t)$ define un producto escalar en $M_n(\mathbb{Q})$.

(ii) Para $n = 2$, el conjunto de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es ortonormal con respecto al producto escalar anterior.

8°. Sea $\mathbb{R}^4$ el espacio real euclídeo habitual y sea W el subespacio vectorial definido por

$$W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + y + 2z + t = 0 \\ x - y - 2t = 0 \end{array} \right\}.$$

(i) Calcular las ecuaciones de $W^\perp$.

(ii) Descomponer el vector $v = (1, 1, 1, 0)$ como suma de un vector de W y un vector de $W^\perp$.

9*. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una *norma* en V es una función $\| \; \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

- $\|u\| \geq 0$, $\forall u \in V$ y $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = 0$.
- $\|\lambda\, u\| = |\lambda| \|u\|$, $\forall u \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in V$.

(i) Demostrar que existe un producto escalar $\langle \, , \, \rangle$ en V tal que $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ si y sólo si $\| \; \|$ satisface la Ley del paralelogramo (i.e. $2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2$, $\forall u, v \in V$).

(ii) Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y definimos $\|(x, y)\| = |x| + |y|$. Demostrar que $\| \; \|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, pero no es el módulo de ningún producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

10. Sea $(V, \langle \; , \; \rangle)$ un espacio euclídeo y $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ un conjunto ortogonal. Demostrar

(i) $\displaystyle \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$ (*Teorema de Pitágoras generalizado*).

(ii) $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle v, u_i \rangle|^2}{\langle u_i, u_i \rangle} \leq \langle v, v \rangle$, $\forall v \in V$ (*Desigualdad de Bessel*).

(iii) Si además $\mathcal{B}$ es base de V, entonces $\displaystyle \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, u_i \rangle \langle w, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}$, $\forall v, w \in V$ (*Identidad de Parseval*).

11. Sea $(V, \langle \; , \; \rangle)$ un espacio euclídeo y $u, v \in V$. Demostrar

(i) $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\|$ si y sólo si u, v son proporcionales.

(ii) $\|u - v\| \geq |\|u\| - \|v\||$.

12. Sea $(V, \langle \; , \; \rangle)$ un espacio euclídeo y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V antiadjunto, es decir, f cumple:

$$\langle f(u), v \rangle = -\langle u, f(v) \rangle \quad \text{para todo } u, v \in V.$$

Demuestra:

(i) $Ker(f)$ e $Im(f)$ son subespacios ortogonales de V.

(ii) $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

(iii) Si (a_{ij}) es la matriz de f en una base ortonormal, entonces $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j.

13°. En el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual a 3, $\mathbb{R}_3[x]$, se define la aplicación $\langle \; , \; \rangle : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0) + p'''(0)q'''(0).$$

(i) Demostrar que $\langle \; , \; \rangle$ define un producto escalar en $\mathbb{R}_3[x]$.

(ii) Determinar una base ortonormal de $\mathbb{R}_3[x]$ con respecto a $\langle \; , \; \rangle$.

(iii) Si $W = \mathcal{L}(1, x^2)$, determinar $W^\perp$.

14. Consideramos $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual. Sean $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (0, 3, -2, 1)$ y $w = (1, 1, 0, 0)$. Hallar todos los vectores de la forma $w + \alpha u + \beta v$ (donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) ortogonales a u y v simultaneamente.

15. Consideramos $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar habitual y sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que si para todo vector $u = (u_1, \ldots, u_n)_{\mathcal{B}}$ se tiene $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$, entonces $\mathcal{B}$ es ortonormal.

16°. Calcular la matriz del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 2), (3, 1, 1), (-2, -1, 2)\}$.

17. Sea V un K-espacio vectorial. Diremos que un endomorfismo $p : V \longrightarrow V$ es un *proyector* si $p \circ p = p$. Sea $p : V \longrightarrow V$ un proyector e $I : V \longrightarrow V$ el endomorfismo identidad. Demuestra que:

(i) Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial. Demostrar que la proyección ortogonal sobre W, Pr_W, es un proyector.

(ii) $I - p$ es también un proyector.

(iii) $Ker(p) \cap Im(p) = \{0_V\}$.

(iv) $Ker(p) = Im(I - p)$.

(v) $V = Ker(p) \oplus Im(p)$.

18°. En un espacio euclídeo V de dimensión 3, el producto escalar con respecto a una cierta base $\mathcal{B}$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sea W un subespacio vectorial de V que respecto a la base $\mathcal{B}$ tiene por ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Calcular $W^{\perp}$.

19°. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, calcular la proyección del vector $(1, 0, 0)$ sobre el plano de ecuación $x + y = 0$.

20°. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, ortonormalizar la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$.

21°. En $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, sean $W \subset \mathbb{R}^n$ subespacio vectorial y $v \in \mathbb{R}^n$. Calcular:

- una base de $W^{\perp}$,
- una base ortogonal de W,
- la proyección ortogonal de v sobre W,
- la distancia de v a W,
- la matriz con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre W,

en los siguiente casos:

(i) $W = \mathcal{L}((1, 0, 1), (2, -1, 1))$, $v = (1, 1, 1)$.

(ii) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$, $v = (1, 1, 1)$.

(iii) $W = \mathcal{L}((2, 1, 1, -1), (1, 1, 3, 0))$, $v = (5, 2, -2, 2)$.

(iv) $W = \mathcal{L}((1, 1, -1, 0), (0, 0, 2, 1), (0, 1, 1, 1))$, $v = (5, 2, -2, 2)$.

(v) $W = \mathcal{L}((1, 2, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 1, 0))$, $v = (0, 0, 1, 2, 1)$.

22°. Dado el plano W de $\mathbb{R}^3$ definido por $Ax + By + cZ = 0$ y el punto $P = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Demostrar

$$\operatorname{dist}(P, W) = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

23. Calcular los cosenos de los ángulos que forma la recta de ecuaciones $x_1 = \cdots = x_n$ de $\mathbb{R}^n$ con los ejes coordenados.

24. Calcular los ángulos que forman las aristas opuestas de un tetraedro regular.

25°. Dadas las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, determinar si son formas bilineales. En cuyo caso calcular la matriz con respecto a la base canónica y decidir si son productos escalares.

(i) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2$.

(ii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$.

(iii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

(iv) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_1$.

(v) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$.

(vi) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_1 - x_1y_2$.

(vii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1$.

(viii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

(ix) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2 + 11x_3y_3$.

26°. Se define la aplicación $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3).$$

(i) Demostrar que $\langle\ ,\ \rangle$ define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$

(ii) Hallar su matriz con respecto a la base canónica.

(iii) Hallar la matriz con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (4, -2, 0), (1, 1, 5)\}$.

(iv) Ortogonalizar la base $\mathcal{B}$ y calcular la matriz con respecto a esta nueva base.

(v) Calcular una base ortonormal del plano de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

27°. Sea $S = \{(1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 2), (1, -1, -1, 2)\} \subset \mathbb{R}^4$ y $W = \mathcal{L}(S)$:

(i) Calcular la matriz de la restricción a W del producto escalar usual de $\mathbb{R}^4$ con respecto a S.

(ii) Ortonormalizar la base S y extender esta a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

28°. Demostrar que la aplicación

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + x_4y_4,$$

define un producto escalar en $\mathbb{R}^4$. Para este producto escalar se pide calcular:

(i) Su matriz con respecto a la base canónica.

(ii) Una base ortonormal del subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^4$ definido por la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

(iii) La proyección ortogonal del punto $P = (1, 1, 1, 1)$ sobre W.

(iv) $\mathrm{dist}(P, W)$.

(v) Una base de $W^\perp$.

(vi) La matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre W.

29. Calcular la matriz del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(2,0,1),(1,1,1)\}$ de las dos formas siguientes:

(i) Utilizando una matriz de cambio de base.

(ii) Calculando la matriz de la forma bilineal asociada al producto escalar en la base $\mathcal{B}$.

Comprobar que los dos métodos dan la misma solución.

30. Sea $\mathcal{B} = \{(-2,-1,1),(0,-1,0),(1,-1,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

(i) Demostrar que se puede definir un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ de tal forma que $\mathcal{B}$ es ortonormal.

(ii) Calcular la matriz de dicho producto escalar con respecto a la base canónica.

31°. En $\mathbb{R}_2[x]$ se define el producto escalar $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Calcular la matriz de este producto escalar con respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

32. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y definamos una aplicación $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de la que se conoce:

$$\langle u_1, u_1\rangle = 1, \quad \langle u_1, u_2\rangle = 1, \quad \langle u_2, u_2\rangle = 2, \quad \langle u_2, u_1\rangle = 1.$$

(i) Demostrar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto escalar y calcular su matriz respecto a $\mathcal{B}$.

(ii) Calcular $\langle u, v\rangle$ donde $u = (2,3)_{\mathcal{B}}$ y $v = (1,2)_{\mathcal{B}}$.

33. En $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar que tiene por matriz con respecto a la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sea $W = \mathcal{L}((1,0,1))$. Calcular las ecuaciones cartesianas de $W^{\perp}$.

34. Se dice que dos matrices A y B son congruentes si existe una matriz invertible P tal que $B = P^tAP$. Demostrar que A es simétrica si y sólo si B es simétrica.

35. En $\mathbb{R}_1[x]$ se define el producto escalar $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Calcular:

(i) La matriz de este producto escalar con respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, x\}$.

(ii) Ángulo que forman los polinomios $x+3$ y $2x+4$.

(iii) Proyección ortogonal de $x+3$ sobre el subespacio $\mathcal{L}(x+2)$.

(iv) Ortonormalizar la base $\mathcal{B}$.

36°. Encontrar una base ortonormal para cada uno de los subespacios siguientes:

(i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ con el productor escalar usual..

(ii) $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid xp'(x) = p(x)\}$ con el producto escalar $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$.

(iii) $\{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(A) = 0\}$ con el producto escalar $\langle A, B\rangle = \text{traza}(AB^t)$.

37*. Definimos la aplicación $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-x^2}dx.$$

(i) Demostrar que $\langle\ ,\ \rangle$ define un producto escalar en $\mathbb{R}[x]$.

(ii) Ortogonalizar el conjunto de funciones $1, x, x^2$.

(Ayuda: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.)