Reto 7

Carlos Quesada

1. Solución

Las únicas soluciones a la ecuación:

$$x^4 = y^3 - 35$$

Son $(x, y) = (\pm 6, 11)$

2. Demostración

Sea $a = x^2$, tenemos entonces: $y^3 = a^2 + 35 = (a + \sqrt{-35})(a - \sqrt{-35})$, así que vamos a trabajar en $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-35})} \overset{-35 \equiv 1 (mod 4)}{=} \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-35}}{2}]$. El polinomio se obtiene:

$$t = \frac{1 + \sqrt{-35}}{2} \Rightarrow 2t - 1 = \sqrt{-35} \Rightarrow 4t^2 - 4t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - t + 9 = 0$$

Con la función `K.class_number()` de SAGE calculamos que $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-35})} = 2$, con lo que sabemos que no hay factorización única, así que trabajamos en ideales. Sea P un ideal primo de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-35})}$ tal que $P| < a + \sqrt{-35} >, < a - \sqrt{-35} >$. Entonces P divide a la resta de ambos:

$$P| < 2\sqrt{-35} > = < 2 >< \sqrt{-35} >$$

Ahora:
$t^2 - t + 9 \equiv t^2 - t + 1 (mod\ 2)$ que no tiene solución $\Rightarrow < 2 >$ no se factoriza.

Por otro lado se tiene:

$$< \sqrt{-35} >^2 = < 5 >< 7 >$$

$t^2 - t + 9 \equiv t^2 - t + 4 \equiv (x-3)^2 (mod\, 5) \Rightarrow < 5 >=< 5, \sqrt{-35} - 3 >^2$

$t^2 - t + 9 \equiv t^2 - t + 2 \equiv (x-4)^2 (mod\, 7) \Rightarrow < 7 >=< 7, \sqrt{-35} - 4 >^2$

Sean $\mathfrak{p} =< 2 >, \mathfrak{q} =< 5, \sqrt{-35} - 3 >, \mathfrak{r} =< 7, \sqrt{-35} - 4 >$. Entonces $P = \mathfrak{p}$ ó $P = \mathfrak{q}$ ó $P = \mathfrak{r}$.

Ahora bien, si $P = \mathfrak{q} \Rightarrow 5|y^6 \Rightarrow 5|y \Rightarrow 5|a$. Pero esto quiere decir que $a = 5k \overset{\textit{por la ec original}}{\Longrightarrow} y^3 \equiv 10(mod\, 25)$, lo cual es imposible, como se puede comprobar de nuevo con SAGE. Lo mismo ocurre para $P = \mathfrak{r}$, se llega a que $y^3 \equiv 35(mod\, 49)$, que tampoco se cumple nunca. Por tanto tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{lll} < a + \sqrt{-35} > & =< 2 >^k l & \\ < a - \sqrt{-35} > & =< \overline{2} >^k \bar{l} & =< 2 >^k \bar{l} \end{array} \right\} \Rightarrow y^3 =< 2 >^{2k} \cdot l \cdot \bar{l}$$

donde l y $\bar{l}$ son primos entre si. Entonces tanto l como $< 2 >^{2k}$ tienen que ser un cubo, de donde se tiene que $k \equiv 0(mod\, 3)$ y l es un cubo. Por tanto, $< a + \sqrt{-35} >= \mathfrak{i}^3$. Como $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-35})} = 2$, entonces el orden de $\mathfrak{i}$ divide a 2, por ser el orden del grupo pero también divide a 3 ya que al elevarlo al cubo obtenemos un principal, con lo que tiene orden 1, y por tanto es principal, o sea que $< a + \sqrt{-35} >$ se puede expresar como:

$$< a + \sqrt{-35} >= u < \alpha >^3 \overset{\mathcal{U}(\mathbb{Z})=\pm 1}{=} < \beta >^3 = \left(c + b \left(\frac{1 + \sqrt{-35}}{2} \right) \right)^3$$

Desarrollando y agrupando se obtiene que:

$$a + \sqrt{-35} = \left(c^3 + 3\frac{c^2 b}{2} - 102\frac{cb^2}{4} - 104\frac{b^3}{8} \right) + \left(3\frac{c^2 b}{2} + 3\frac{cb^2}{2} - \frac{8b^3}{2} \right) \sqrt{-35}$$

Por tanto, sacando factor común b en los términos con $\sqrt{-35}$ se obtiene que:

$$\sqrt{-35} = b\left(3\frac{c^2}{2} + 3\frac{cb}{2} - \frac{8b^2}{2} \right) \sqrt{-35} \Rightarrow 2 = b(3c^2 + 3cb - 8b^2) \Rightarrow b = \pm 1, \pm 2$$

Despejando obtenemos que para $b = 1, 2, -2$ no obtenemos c entero, con lo cual no es una solución. Para $b = -1$ obtenemos que $c = 4, -1$. Sabemos que:

$$a = \left(c^3 + 3\frac{c^2 b}{2} - 102\frac{cb^2}{4} - 104\frac{b^3}{8} \right)$$

Ahora sustituyendo $b = -1$ y $c = -1, 4$ obtenemos que $a = 36, 92$ respectivamente. Pero teníamos que $a = x^2$ y como sólo queremos soluciones enteras, sólo nos vale $a = 36$, de donde obtenemos que $x = \pm 6$. Despejando en la ecuacion original obtenemos que el unico valor entero para y es $y = 11$, con lo que las posibles soluciones son $(\pm 6, 11)$