Licenciatura en CC. Matemáticas. — Curso 2005/06

Álgebra III — Ejercicios Final

1. Sea A un anillo. Se dice que es *reducido* si $Nil(A) = 0$.
   (a) Encontrar un anillo reducido de dimensión cero que no sea cuerpo.
   (b) Demostrar que A es un cuerpo si y sólo si A es local reducido y $\dim_{\text{Krüll}}(A) = 0$.
2. Para cada una de las curvas siguientes definidas sobre $\mathbb{R}^2$ calcular sus puntos singulares.
   (a) $x^2 = x^4 + y^4$,
   (b) $xy = x^6 + y^6$,
   (c) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$,
   (d) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.
3. Sea la extensión de anillos $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{R}[x, y]/ < y^2 - x >$. Calcular el cardinal de la fibra sobre $\alpha \in \mathbb{R}$, es decir, sobre $< x - \alpha >$.
4. Sea A un cuerpo y $B \subset A$ un subanillo de A tal que A es una B-álgebra finitamente generada, entonces B es un cuerpo.
5. Sea $J =< xy, xz, yz >\subset K[x, y, z]$. Calcular $V(J) \subset \mathbb{A}^3(K)$. ¿Es irreducible $V(J)$? ¿Se cumple $J = I(V(J))$?
6. Sea $J =< x^2 + y^2 - 1, y - 1 >$. Calcular $f \in I(V(J)) \setminus J$.
7. Sea $J =< x^2 + y^2 + z^2, xy + xz + yz >$. Calcular $V(J)$ e $I(V(J))$.
8. Sea $I =< x, y^2 >$. Estudiar si I es un ideal primo o/y maximal en $K[x, y]$. Calcular el radical de I.
9. Sea el anillo $A = K[x, y, z]/ < xy - z^2 >$. ¿Es el ideal $I =< x, y > A$ primo?
10. Sea $A = K[x, y]$. Demostrar que el ideal $M =< x, y >$ no es un A-módulo libre.

11. Sea K un cuerpo. Decidir cuales de los siguientes anillos es noetheriano:

    (a) K,
    (b) $K[x]$,
    (c) $K[x_1, \ldots, x_n]$.
    (d) $K[\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}]$.
    (e) $\left\{ \sum_{i,j\geq 0} a_{ij}x^i y^j \mid a_{i,j} \in K\,, i > 0 \text{ si } j > 0 \right\}$.

12. Sea A un anillo noetheriano y B una A-Algebra finitamente generada. Demostrar que entonces B también es noetheriano.

13. Decidir cuales de las siguientes extensiones de anillos es entera:

    (a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[1/3]$.
    (b) $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{Q}[x][1/(x^2+1)]$.
    (c) $\mathbb{Q}[x^2] \subset \mathbb{Q}[x]$.
    (d) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
    (e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\tau]$, donde $\tau = (1+\sqrt{5})/2$.
    (f) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\alpha]$, donde $\tau = (1+\sqrt{3})/2$.

    Sea A un dominio, se dice que es *normal* si es integramente cerrado en su cuerpo de fracciones. Un caso importante es el del anillo de enteros de un cuerpo de números: un cuerpo de números es una extensión de cuerpos finita $\mathbb{Q} \subset K$ del cuerpo de los racionales (es decir, $[K : \mathbb{Q}] < \infty$). El anillo de enteros de K es el anillo

    $$\mathcal{O}_K = \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ es entero sobre } Z\}.$$

    Es decir, $\mathcal{O}_K$ es el cierre entero de $\mathbb{Z}$ en K.

14. Demostrar:

    (a) Un dominio de factorización única es normal.
    (b) Sea n un entero libre de cuadrados y $K = \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. Entonces $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ donde

    $$\alpha = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si} \quad n \not\equiv 1\, mod\, 4 \\[2ex] \dfrac{1+\sqrt{n}}{2} & \text{si} \quad n \equiv 1\, mod\, 4 \end{cases}$$

    (c) $A = K[x,y]/ < y^2 - x^3 >$ no es normal

15. Sea $\alpha = a + b\tau \in \mathbb{Z}[\tau]$, donde τ es la razón aurea. Calcular $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ mónico tal que $p(\alpha) = 0$.

16. Sea $A \subset B$ una extensión de anillos. Sean $\alpha, \beta \in B$ tal que satisfacen

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \qquad \text{y} \qquad \beta^2 + c\beta + d = 0$$

donde $a, b, c, d \in A$. Calcular $f(x), g(x) \in A[x]$ mónicos tal que

$$f(\alpha + \beta) = 0 \qquad \text{y} \qquad g(\alpha\beta) = 0.$$

17. Sea $A = K[x, y]/ < y^2 - f(x) >$, donde $f(x) \in K[x]$. Estudiar cuando A es un dominio.

18. Demuestrese

    (a) $\mathbb{Z}_{<3>} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq 0$.

19. Demuestre $\mathbb{R}[x, y]/ < x^2 + y^2 + 1 > \otimes_{\mathbb{R}[x,y]} \mathbb{R}[x, y]/ < x > \simeq \mathbb{C}$.

20. Estudiese si el $\mathbb{Z}$-módulo

$$\mathbb{Z}^2/ < (2, 3) >$$

es un $\mathbb{Z}$-módulo con base $\{\overline{(1, 0)}, \overline{(0, 1)}\}$.

21. Demuestre que si K es un cuerpo, $K[x, y]/ < y^3 - x, xy - 2 >$ es un $K[x]$-módulo finitamente generado.