Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

NOTA

Cálculo III. Segundo Curso de Matemáticas.
09/02/2009

Apellidos..... Nombre.....
D.N.I. ..... Grupo .....

He asistido a las clases en el turno de $\begin{cases} \text{mañana} \\ \text{tarde} \\ \text{ninguno} \end{cases}$

---

1) Las respuestas a las cuestiones siguientes deben ser argumentadas con precisión.

1. Sea la función f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2}y}{e^{-2/x^2}+y^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales en $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

   b) Estudiar la diferenciabilidad en $(0,0)$.

2. Dada la función,

$$f(x,y) = \begin{cases} (y-e^{-1/x^2})(y-3e^{-1/x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ \\ y^2 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

   estudiar si en $(0,0)$ tiene un máximo o un mínimo local.

---

2) (a) Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ verificando

$$(E) \quad \begin{cases} e^{2x}+e^{yz} &= 2 \\ -e^x - y^2 + z^2 &= 0 \end{cases}$$

¿Es posible definir las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno de (x,y,z) de manera que sean diferenciables y verifiquen las ecuaciones (E)? Enunciar con precisión el teorema que garantiza este resultado y verificar que se cumplen sus hipótesis.

(b) Estudiar si

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, e^{2x}+e^{yz} = 2, z^2 = y^2 + e^x\}$$

es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. De ser así, determinar su dimensión y el espacio tangente a M en $(0,0,1)$.

(c) Hallar todos los puntos de M en los que la función $f(x,y,z) = -2e^{-x} + e^{yz}$ en M alcanza valores extremos locales.

3) a) Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ definida por $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (1, z, y)$. Calcúlese la integral de $\vec{F}$ a lo largo de γ.

b) En cada punto (x, y, z) de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 - \frac{x^2 + y^2}{2}, \ x, y \in [0, 1]\},$$

la densidad superficial es xy. Calcular la masa de S.

De entre los siguientes ejercicios, se pide elegir uno y sólo uno, de modo que a cada estudiante se le corregirá un máximo de cuatro ejercicios.

---

4) Sean $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, \quad y \geq 0\}$ y

$$f : A \to \mathbb{R}^2$$

definida por $f(x, y) = (\sqrt{y + 1}, \frac{x}{2})$. Estudiar

1. Si f es una aplicación contractiva.
2. Si f aplica A en sí mismo.
3. Si f tiene en A un punto fijo.
4. Hállense, si procede, todos los puntos fijos de f en A.

---

5) Un emisor de señales emite una señal cuya representación es

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (2x^2 + y^2 + z^2)\vec{e_1} + (2y^2 + z^2 + x^2)\vec{e_2} + (2z^2 + x^2 + y^2)\vec{e_3}.$$

Para su recepción se ha construido un elemento receptor cuya representación geométrica es

$$S_1 : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 4z \\ 0 \leq & z & \leq 1 \end{array} \right. \qquad S_2 : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & (z - 3)^2 \\ 1 \leq & z & \leq 3 \end{array} \right.$$

Sabiendo que para que dicho receptor sea válido, el flujo de la señal a través de la superficie exterior de $M = S_1 \cup S_2$ ha de ser mayor que 64, se pide averiguar si el receptor es válido.