CÁLCULO III

2º Curso de CC. MATEMÁTICAS, 2008/2009

Ejercicios Hoja 5

---

1. Calcular la integral del campo $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y, x + xy + y^2)$ en la circunferencia unidad con la orientación positiva, primero empleando la definición y después empleando el teorema de Green.

2. Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F} = (5\,x^{3/2}\,e^{y^2}, 4\,y\,x^{5/2}\,e^{y^2} + 5\,y^2)$$

a lo largo de la curva en polares $r = 2\,\theta^3$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

3. Dados los puntos $A = (2,0), B = (1,-1), C = (1,0)$ y $D = (0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$, considérese el camino Γ formado por el arco AB de la circunferencia de centro C y los segmentos orientados BD, DO, OA (O es el origen de coordenadas). Calcular la integral

$$\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\,dx + (x - y\arctan y)\,dy\,.$$

4. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$. Dividir D en dos regiones acotadas por sendas curvas cerradas simples y demostrar que para $\vec{F} = (P,Q) \in C^1(D)$ se cumple

$$\int_{C_b} \vec{F}\cdot\vec{ds} - \int_{C_a} \vec{F}\cdot\vec{ds} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

donde C_a y C_b son las circunferencias de radios a y b respectivamente, con la orientación positiva.

5. Hallar la integral de

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

a lo largo de la circunferencia centrada de radio r con la orientación positiva. Hallar también

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y explicar por qué esto no contradice el Teorema de Green.

6. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $\vec{F}$ calcular el rotacional y la divergencia de $\vec{F}$.

a) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y\,z, y^2 + x\,z, z^2 + x\,y)\,,$ *b)* $\vec{F}(x,y,z) = (2\,z - 3\,y, 3\,x - z, y - 2\,x)\,,$

c) $\vec{F}(x,y,z) = (e^{xy}, \cos xy, \cos xz^2)\,,$ *d)* $\vec{F}(x,y,z) = (x^2\,\operatorname{sen} y, y^2 \operatorname{sen} xz, xy \operatorname{sen}(\cos z))\,.$

7. Transformar la integral de superficie

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{dS}\,,$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x\,y, x\,z)$, donde S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2 = 1, z \ge 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \ge 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = (y - z, y\,z, -x\,z)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \le x,y,z \le 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4.

8. Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ y el plano $x+y+z=0$,

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi\,R^2\sqrt{3}\,.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2+y^2=2\,y$ y el plano $y=z$,

$$\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0\,, \qquad \int_C y^2\,dx + x\,y\,dy + x\,z\,dz = 0\,.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2+y^2=a^2$ y el plano $x/a+z/b=1$, con $a,b>0$,

$$\int_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = 2\pi\,a(a+b)\,.$$

9. Para cada uno de los campos vectoriales que siguen, determinar un potencial, cuando el campo sea un campo conservativo,

a) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z, -(y+z), x-y)$.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2\,x\,y^3, x^2\,z^3, 3\,x^2\,y\,z^2)$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = (3\,y^4\,z^2, 4\,x^3\,z^2, -3\,x^2\,y^2)$.

d) $\vec{F}(x,y,z) = (4\,x\,y - 3\,x^2\,z^2 + 1, 2\,(x^2+1), -(2\,x^3\,z + 3\,z^2))$.

10. Sean $C_x,\ C_y,\ C_z \subset \mathbb{R}^3$ circunferencias de radio ε centradas en un mismo punto y paralelas, respectivamente, a los planos coordenados $YZ,\ XZ,\ XY$. Demostrar que en dicho punto se cumple

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\Big(\int_{C_x}\vec{F}\cdot d\vec{s}\,, \int_{C_y}\vec{F}\cdot d\vec{s}\,, \int_{C_z}\vec{F}\cdot d\vec{s}\Big)$$

para cualquier campo $\vec{F}\in C^1$.

11. Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ y del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2+y^2\le 1/2$. Calcular $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ (con la normal exterior) donde

$$\vec{F} = (x\,z + e^{y\,\mathrm{sen}\,z}, 2\,y\,z + \cos xz, -z^2 + e^x\cos y).$$

12. Hallar la integral del campo

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1+z^2), y + \mathrm{sen}\,\sqrt{1+x^2+z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la normal exterior.

13. Hallar la integral de superficie

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad \text{siendo} \qquad \vec{F} = (y-z, z-x, x-y)\,,$$

cuando S es el hemisferio norte de la esfera unidad orientada hacia el exterior. *Resultado:* 0.

14. Hallar la integral de superficie

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \qquad \text{siendo} \qquad \vec{F} = (x^3, y^3, -a\,b\,z),$$

cuando S es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

orientado hacia el exterior.

15. Sea S la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

directamente y mediante el teorema de la divergencia.

16. Demostrar la llamada "fórmula de integración por partes", o "identidad de Green"

$$\int_V f \Delta g = \int_S f\ \nabla g - \int_V \nabla f \cdot \nabla g$$

para V un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ limitado por S y $f,\ g$ funciones C^2 arbitrarias. *Indicación:* Demostrar primero $\operatorname{div}(f\ \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g$. Recuérdese que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \operatorname{div}\nabla\,.$$

17. Demostrar que para campos C^2

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}.$$