CÁLCULO III

2º Curso de CC. Matemáticas, 2005/2006

Ejercicios Hoja 4

---

1. Calcular la integral,

$$\int_\sigma f\, ds\,,$$

de la función $f(x,y,z)$ dada, dibujando en cada caso el camino σ de integración.

a) $f(x,y,z) = x+y+z\,, \qquad \sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)\,, \quad 0 \le t \le \pi\,.$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{y+z}\,, \qquad \sigma(t) = (t, \dfrac{2}{3}\, t^{3/2}, t)\,, \quad 1 \le t \le 2\,.$

c) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{y=0\} \to \mathbb{R}\,,$ definida mediante $f(x,y,z) = \dfrac{1}{y^3}\,,$

$\sigma(t) = (\log t, t, 2)\,, \quad 1 \le t \le e\,.$

2. *a)* Dibujar y calcular la longitud del arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x = R\,(t - \sin t)\,, \\ y = R\,(1 - \cos t)\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,. \end{cases}$$

b) Hallar la longitud de la cardioide que en coordenadas polares viene dada por $r = 1 + \cos\theta$, con $0 \le \theta \le \pi$. Dibujar esta curva.

c) Calcular el área de la región limitada por la cardioide anterior cuando $0 \le \theta \le 2\pi$.

3. Hallar la integral,

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds}\,,$$

del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo del camino orientado C que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

a) $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)\,,$ a lo largo de la curva $y = 1 - |1-x|\,,$ desde $(0,0)$ hasta $(2,0)\,.$

b) $\vec{F}(x,y) = (x^2 - 2\,x\,y, y^2 - 2\,x\,y)\,,$ siendo C el arco de parábola $y = x^2$ que une los puntos $(-2,4)$ y $(1,1)\,.$

c) $\vec{F}(x,y) = (x+y, x-y)\,,$ siendo C la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\,,$ recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

4. Hallar la longitud del arco de curva definido por

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \cos t, \qquad z = \cosh t, \qquad 0 \le t \le \log 7.$$

5. Calcular el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del cilindro determinado por $x^2+y^2 = a^2$, $0 \le z \le b$ con la normal exterior (incluyendo las bases).

6. En cada punto (x,y,z) de la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 1 - \frac{x^2+y^2}{2}\,,\ x,y \in [0,1]\},$$

la densidad superficial es xy. Calcular la masa de S.

7. *a)* Hallar el área de la región de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ determinada por la relación $x^2+y^2 \leq R\,x$. *Resultado:* $2R^2(\pi/2-1)$. (*Indicación:* Usar una parametrización con $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$).

b) Hallar el área de la superficie determinada por $x+y+z=1$ y $x^2+2\,y^2 \leq 1$. *Resultado:* $\pi\sqrt{6}/2$.

8. Una esfera inscrita en un cilindro circular recto se corta con dos planos paralelos perpendiculares al eje del cilindro. Demostrar que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre esos dos planos tienen igual área. *Nota*: Arquímedes empleó esta propiedad para calcular el área y el volumen de la esfera.

9. Sea p_0 el punto de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas $(0,0,1)$. Calcular el flujo del campo

$$F(p)=\frac{p-p_0}{\|p-p_0\|^2}\,, \qquad p=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,$$

a través del triángulo esférico de vértices $(1,0,0),(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ en la esfera de centro $\mathbf{O}$ y radio 1 con la normal exterior. *Resultado:* $\pi/4$.

10. Calcular la integral

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad \text{con } \vec{F}=(2\,x,5\,y,-4\,z),$$

sobre la esfera S de centro $\mathbf{O}$ y radio R, orientada hacia el exterior. *Resultado:* $4\pi\,R^3$.

11. Calcular el flujo de $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ a través de la porción del paraboloide $z=x^2+y^2$ en la región $x\geq 0$, $y\geq 0$, $0\leq z\leq 9$; considerando la orientación dada por la normal con tercera coordenada negativa. *Resultado:* $81\,\pi/8$.

12. Demostrar que si la gráfica de una función positiva $y=f(x)$ gira alrededor del eje X en el intervalo $[a,b]$, el área de la superficie obtenida viene dada por

$$2\pi\int_a^b f\,\sqrt{1+(f')^2}\,.$$

13. Sea el campo $\vec{F}(x,y,z)=(y\,e^x,e^x+z,y)$. Compruébese que

$$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{s}\,,$$

donde C_1 es la recta que une el origen con $(1,1,1)$ y C_2 es la línea quebrada que une el origen con $(0,1,1)$ y después con $(1,1,1)$.