CÁLCULO III

2º Curso de CC. Matemáticas, 2005/2006

Ejercicios Hoja 3

---

1. Si $M, N \subset \mathbb{R}^{n+k}$ son subvariedades n dimensionales arbitrarias, ¿es siempre $M \cup N$ una subvariedad? ¿Y $M \cap N$?

2. Estudiar si el conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x\,y = 0\,,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z \neq 0, \pm 1\,\}$$

es una subvariedad unidimensional de $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente M.

3. Demostrar que $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ no es una subvariedad unidimensional de $\mathbb{R}^2$.

4. Representar gráficamente el conjunto

$$C = \{\big(\cos t,\, \operatorname{sen} t, t^2\,(2\pi - t)^2\big) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

y probar que es una subvariedad de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$. Hallar los espacios tangente y normal a C en el punto $(1, 0, 0)$.

5. Considérense las subvariedades de dimensión 1, C_1 y C_2 en $\mathbb{R}^3$ determinadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente ambas curvas.

b) Probar que, efectivamente, son subvariedades de dimensión 1.

c) Hallar la recta tangente a C_1 en el punto $(1/\sqrt{14}\,, 2/\sqrt{14}\,, -3/\sqrt{14})$. Hallar la ecuación del plano normal a C_2 en el punto $((3 + \sqrt{5})/2, (3 + \sqrt{5})/4, -(5 + 3\sqrt{5})/4)$.

d) Calcular parametrizaciones locales de C_1 y de C_2. *Indicación:* Utilizar coordenadas esféricas en C_1 y cilíndricas en C_2.

6. *a)* Hallar el hiperplano tangente a la gráfica $\mathcal{G}$ de la función

$$f(x, y, z) = e^y\,\cos z + e^z\,\cos x + e^x\,\cos y$$

en el punto de $\mathcal{G}$ correspondiente a $x = y = z = 0$.

b) Estudiar si

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 3\}$$

define, localmente en $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$, una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Hallar el plano tangente a M en $\mathbf{p}$. Explicar la relación que guarda éste con el calculado en el apartado anterior.

7. Sea una parametrización $\mathbf{X}$ de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{X}(0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$ y sea $(a_{ij})_{i=1,2,3,j=1,2}$ la matriz de $D\mathbf{X}(0, 0)$. Demostrar que la recta normal a S en (x_0, y_0, z_0) viene dada por

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} \\ a_{32} & a_{12} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}\,.$$

8. Sea

$$\mathbb{T}^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1\,,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

Estudiar si M es una subvariedad bidimensional de $\mathbb{R}^4$. Hallar una parametrización de M en un entorno de $(1, 0, 0, -1)$. Hallar el espacio tangente a M en $(0, 1, 1, 0)$ exhibiendo una de sus bases.

9. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$ la curva definida por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7 \\ x^2 - 3\,z^2 + t^2 = 2 \\ 4\,x^2 - y^2 - z^2 - 2\,t^2 = -6 \end{cases}$$

Hallar los puntos de Γ en los que $(2, -16, 4, 5)$ es vector tangente.

10. Considérese la superficie esférica $\mathbb{S}^2$ descrita mediante la parametrización local

$$\mathbf{X}(u,v) = \Big(\frac{2\,u}{1+u^2+v^2}, \frac{2\,v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\Big)$$

dada por la proyección estereográfica (que proyecta cada punto de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ en $\mathbb{S}^2$ por medio de la recta que lo une con el polo norte $N = (0,0,1)$). Sea Γ la curva en $\mathbb{S}^2$ obtenida mediante

$$\gamma(u) = \mathbf{X}(u,v) \qquad \text{cuando} \quad 3\,v = u - 2\,,\ u \in \mathbb{R}\,.$$

a) Representar gráficamente Γ en $\mathbb{S}^2$. *Indicación:* Intentar visualizar la proyección estereográfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto $\big(\frac{10}{27}, \frac{2}{27}, \frac{25}{27}\big)$.

11. *a)* Demostrar que

$$\mathbb{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$$

es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente $\mathbb{H}$.

b) Demostrar que la función

$$\mathbf{X}(u,v) = \big(v\,\cos u, v\,\operatorname{sen} u, u\big)\,, \qquad \text{donde} \quad u \in \mathbb{R}\,,\ v > 0\,,$$

permite definir parametrizaciones locales de una superficie regular $\mathcal{H}$ en $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente $\mathcal{H}$.

12. *a)* Hallar los valores extremos de $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ con la condición $x - y = \pi/4$.

b) Hallar los valores extremos de $f(x,y,z) = x - 2\,y + 2\,z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

13. *a)* Hallar las distancias máxima y mínima desde el origen de coordenadas a la curva en $\mathbb{R}^2$

$$5\,x^2 + 6\,x\,y + 5\,y^2 = 8\,.$$

b) Hallar los puntos de la curva determinada por

$$\begin{cases} x^2 + x\,y + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que están más próximos al origen.

14. *a)* Hallar el valor máximo de $\log x + \log y + 3\,\log z$ en la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5\,r^2$ en la que $x > 0, y > 0$ y $z > 0$. Aplicar el resultado para demostrar que para cualesquiera números reales positivos a, b y c se cumple

$$a\,b\,c^3 \le 27\,\Big(\frac{a+b+c}{5}\Big)^5\,.$$

b) Demostrar la desigualdad aritmético-geométrica

$$\sqrt[n]{a_1\,a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{para } a_i \ge 0.$$

Indicación: Escríbase $a_i = x_i^2$ y considérese sólo lo que ocurre en la esfera unidad n-dimensional.

15. *a)* Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2\,x + y^2$ sobre el conjunto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y^2 \geq x\}\,.$$

b) Determinar los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = 2\,x^2 + y^2 + z^2 - x\,y$ sobre el conjunto

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}\,.$$

16. Calcular el paralelepípedo de mayor volumen inscrito en el elipsoide

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}\,,$$

siendo $a, b, c > 0$.

17. Sean a y b dos números reales positivos tales que $a\,b\,(a+b) = 1$. Calcular el volumen máximo de los sólidos que tienen como base el triángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$ y $(0,b)$ y cuyas secciones al cortar por planos perpendiculares al plano XY y paralelos al plano YZ son triángulos isósceles de altura 4.

18. Para fabricar determinadas placas metálicas se utiliza aluminio, hierro y magnesio. La cantidad de placas producidas a partir de x kg de aluminio, y kg de hierro y z kg de magnesio es $Q(x,y,z) = x\,y\,z$. Si el coste del aluminio es 600 pts/kg, el del hierro es 400 pts/kg y el del magnesio es 800 pts/kg, ¿qué cantidad de cada metal debe emplearse para producir 1000 placas al menor coste posible?

19. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un envase metálico cilíndrico (con ambas tapas) de un litro de capacidad y cuya construcción requiera la menor cantidad de metal?

20. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar una fórmula para la distancia de un punto (a,b,c) a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$.