CÁLCULO III

2º Curso de CC. Matemáticas, 2008/2009

Ejercicios Hoja 1

---

1. Analícese en cada uno de los ejemplos siguientes, la continuidad, la existencia de derivadas parciales, la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ y la continuidad en $(0,0)$ de las derivadas parciales.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\,e^{-|x|}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+7\,y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{3}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \text{sen}\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{4}$$

2. *a)* Calcular la matriz de la diferencial, respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, de la función

$$f(x,y) = \left(\frac{2\,x}{1+x^2+y^2}, \frac{2\,y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right).$$

Comprobar que $\|f(x,y)\| = 1$ en todos los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Hay algún punto $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ con $a^2+b^2+c^2 = 1$ y que no es imagen por f de ningún (x,y) de $\mathbb{R}^2$?

b) Considérese la función, definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

¿Es posible asignar un valor a $f(0,0)$ de forma que f sea continua en este punto? Calcular la matriz de la diferencial $Df(x,y)$, respecto de las bases canónicas en $\mathbb{R}^2$, en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para cada (x,y), localizar en el plano su transformado $f(x,y)$. ¿Es f inyectiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Hallar la función inversa de f.

c) Comprobar que la intensidad del campo gravitatorio

$$\mathbf{E} = G\,M\,\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\,, \qquad \text{con} \quad \mathbf{r} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \ \text{ y } G, M \text{ constantes,}$$

satisface las ecuaciones

$$0 = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\,,$$

$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1}\,.$$

3. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)\,dt + \int_0^y g_2(x,t)\,dt\,.$$

a) Probar que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g_2(x,y)\,.$$

b) Hallar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y\,.$$

c) Hallar una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2\,xy\,, \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 - 2\,y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = e^z\,.$$

4. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua y A abierto. Supongamos que existen todas las derivadas direccionales de f en $x_0 \in A$. ¿Se puede asegurar que f sea diferenciable en x_0? *Indicación:* Considérese la siguiente función y estúdiese su comportamiento para $y = x^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que Df es constante. Probar que f es una función afín y que la parte lineal de f es el valor constante de Df.

6. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado m cuando $f(tx) = t^m\, f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si f es diferenciable y homogénea de grado $m \neq 0$, probar que

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = m\, f(x) \qquad \text{en cada } x \in \mathbb{R}^N\,.$$

7. Consideremos $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \langle x, y \rangle\,,$$

producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

a) Hallar $DF(a,b)$.

b) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $h(t) = F(f(t), g(t))$, calcular la derivada de h.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ diferenciable. Demostrar que $\|f(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $f(t)$ y $f'(t)$ son ortogonales.

8. Supongamos que la función dos veces diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ describe la posición, en cada instante t, de una partícula que se mueve sobre la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r, con velocidad constante v. Demostrar que los vectores $f(t)$ y $f''(t)$ son ambos ortogonales al vector $f'(t)$. Demostrar que el vector aceleración $f''(t)$ apunta siempre hacia el centro de la circunferencia y que tiene longitud v^2/r.

9. *a)* Calcular las diferenciales de $f_1(x) = ||x||^4$, $f_2(x) = \langle a, x\rangle$, $f_3(x) = \langle x, L(x)\rangle$ y $f_4(x, y) = \langle x, L(y)\rangle$, donde $a \in \mathbb{R}^N$ es fijo, $x, y \in \mathbb{R}^N$ son variables y $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal.

b) Sea $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. Calcular la aplicación lineal $DB(x, y)$.

c) Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como sigue:

$$f(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} .$$

Hallar la aplicación lineal $Df(x, y)$.

10. Considérese una partícula en $\mathbb{R}^3$, de masa m y con vector de posición $f(t)$. Sean $\mathbf{L}(t) = f(t) \times mf'(t)$ su *momento angular* y $\mathbf{T}(t) = f(t) \times mf''(t)$ el *momento de la fuerza aplicada.*

a) Demostrar que $\mathbf{L}'(t) = \mathbf{T}(t)$ y que, en particular, el momento angular es constante cuando el momento de la fuerza aplicada es nulo. (Ésta es la *ley de conservación del momento angular.*)

b) Cuando la partícula se mueve en un campo central de fuerzas, es decir, $f(t)$ y $f''(t)$ son paralelos, dedúzcase de *a)* que necesariamente permanece en algún plano fijo que pasa por el centro del campo.

11. Se supone $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua. Hallar la diferencial de f en (x, y) , $Df(x, y)$, en los casos siguientes

$$a) \quad f(x, y) = \int_a^{x+y} g(s)\, ds\,, \qquad\qquad b) \quad f(x, y) = \int_a^{xy} g(s)\, ds\,.$$

12. Usar la *regla de la cadena* para calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, siendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) $F(x, y, z) = f(h(x), g(x, y), z)$,

b) $G(x, y, z) = h(f(x, y, z)g(x, y))$,

c) $H(x, y, z) = g(f(x, y, h(x)), g(z, y))$,

d) $I(x, y, z) = (x, F(x, y, z), z)$.

13. Sean $S \subset \mathbb{R}^N$ abierto y convexo y $f : S \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ de clase C^1 en S . Demostrar que si

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, \xi_i\, \xi_j > 0 \qquad \text{para todo } x \in S \text{ y todo } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}\,,$$

entonces f es inyectiva en S .

14. El determinante Hessiano debe su nombre a O. Hesse quien lo introdujo para estudiar curvas algebraicas. Probar el resultado de Hesse que afirma que si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ una matriz con determinante 1 y $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función C^2, entonces el determinante Hessiano de $g(x) = f(Ax)$ en el origen coincide con el de f .

15. Calcular los extremos (máximos y mínimos) relativos de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2\, x^2\, y^2 - 2\, x^2 + 2\, y^2\,,$$

indicando su carácter.

16. Considérese la función

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 6\, x^2\, y^2 + 8\, x^3.$$

a) Estudiando el comportamiento de $h(x) = f(x, x)$, probar que f no alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo en el origen.

b) Hallar los extremos relativos de f indicando su carácter.