CÁLCULO III
2º Curso de CC. Matemáticas, 2008/2009

Ejercicios Hoja 0

---

1. Denotamos por $||x||$ la norma euclídea asociada al producto escalar en $\mathbb{R}^N$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Pruébense las dos identidades siguientes e interprétense geométricamente:

(1) $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2$
(2) $4\langle x, y\rangle = ||x+y||^2 - ||x-y||^2$

2. Discutir cuáles de los conjuntos siguientes son abiertos o cerrados.

(1) $\bigcap_{k=1}^{\infty} [-1, \frac{1}{k})$ en $\mathbb{R}$.
(2) $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
(3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leq y\}$ en $\mathbb{R}^2$.
(4) $H = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x_1 = 0\}$ en $\mathbb{R}^N$.
(5) $\{x \in \mathbb{R}^N \,|\, ||x|| = 1\}$ en $\mathbb{R}^N$.

Determínense el interior, la frontera, los puntos de acumulación y la clausura (el cierre) de cada uno de los conjuntos anteriores.

3. Sea $U \subset \mathbb{R}^N$ conjunto abierto y $A \subset \mathbb{R}^N$ un subjonjunto tal que $U \subset A$. Pruébese que $U \subset \mathrm{int}(A)$. Enunciar y demostrar la afirmación análoga para cerrados.

4. Sean $x \in \mathbb{R}^N$ y $A \subset \mathbb{R}^N$. Se define la distancia de x a A por

$$d(x, A) = \inf\{||x-y|| \,|\, y \in A\}.$$

(a) Sea $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \,|d(x,A) < \epsilon\}$. Probar que A_ϵ es abierto.
(b) Si se define $A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \,|d(x,A) \leq \epsilon\}$, probar que es cerrado.
(c) Pruébese que A es cerrado si y solo si

$$A = \bigcap_{\epsilon > 0} A^\epsilon.$$

5. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^m$. Sea x un punto de acumulación de $A \bigcup B$. ¿Se puede concluir que x es un punto de acumulación de A o de B?

6. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$||x_{k+1} - x_k|| \leq r||x_k - x_{k-1}||,$$

$0 < r < 1$. Probar que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

7. Probar las siguientes proposiciones.

(1) $A \subset \mathbb{R}^N$ es compacto si y solo si cualquier subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación.

(2) Todo conjunto acotado y no finito tiene un punto de acumulación. ¿Podemos decir que dicho punto de acumulación está en A?

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos?

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| < 1\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| = 1\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \geq 1\}. \end{aligned}$$

9. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo y conteniendo más de un punto. Probar que todo punto de A es punto de acumulación.

10. Sea $\mathcal{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x|| = 1\}$. Sea $f : \mathcal{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ una función continua. Estúdiese si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.

(1) $f(\mathcal{S}^{n-1})$ es acotado.

(2) $f(\mathcal{S}^{n-1})$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Si además $f(\mathcal{S}^{n-1}) \subset \mathbb{Q}$, ¿qué se puede decir de f?

11. Sean y $A \subset \mathbb{R}^N$ y consideremos la función distancia $f(x) = d(x, A)$, $x \in \mathbb{R}^N$, definida antes.

(a) Demuéstrese que f es continua en $\mathbb{R}^N$.

(b) Hállese el conjunto $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ f(x) = 0\}$.

12. Demostrar que toda transformación lineal $T : \ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es continua.

13. Se consideran en $\mathbb{R}^N$ las normas

$$||x||_1 = \sum_{1=1}^{N} |x_i|, \quad ||x||_\infty = \max\{|x_i| \,|\, i = 1 \ldots N\}.$$

Sea A una matriz $N \times N$. Se define la norma de A por

$$|||A||| = \max_{x \in \mathbb{R}^N, \quad x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Determínense las normas de $\mathcal{A}$ como operador respecto a las normas $||x||_1$ y $||x||_\infty$ en $\mathbb{R}^N$.

14. Demuéstrese que la norma de una matriz $A \in \mathcal{M}(N, \mathbb{C})$ respecto a la norma euclídea en $\mathbb{R}^N$ es:

$$|||A||| = \big(\max\{ \text{ autovalores de } A^* A\}\big)^{1/2},$$

donde A^* es la matriz conjugada de la traspuesta.

Pruébese que si $A \in \mathcal{M}(N, \mathbb{C})$,

$$||A|| \leq \text{traza}\,(A^* A).$$