Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

NOTA

Cálculo III. Segundo Curso de Matemáticas.
Examen extraordinario del día 01/09/2009

Apellidos..... Nombre.....
D.N.I. ..... Grupo .....

He asistido a las clases en el turno de $\begin{cases} \text{mañana} \\ \text{tarde} \\ \text{ninguno} \end{cases}$

Las respuestas a las cuestiones siguientes deben ser argumentadas con precisión.

---

1)

(a) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 1 + \sqrt{x^4 + y^2}\,.$$

Estudiar si f es diferenciable en $(0, 0)$.

(b) Estudiar la diferenciabilidad en el origen de la función $g(x, y) = (2x + y)\sqrt{x^4 + y^2}$.

---

2) Considérese la función

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 6\,x^2\,y^2 + 8\,x^3.$$

(a) Estudiando el comportamiento de la función $h(x) = f(x, x)$, probar que f no alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo en el origen.

(b) Hallar los extremos relativos de f, indicando su carácter.

---

3) Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \big(y + \alpha \cos x, \alpha x + \cos y\big).$$

(a) Discútanse los valores de α para que f tenga inversa diferenciable en un entorno de $(0, 0)$.

(b) Estudiar según los valores de α para que f tenga inversa diferenciable en un entorno de $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(c) Analizar el caso $\alpha = 0$.

(d) Si $\alpha \neq 0$ analizar si los puntos en los que f no tiene inversa diferenciable definen una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^2$. En caso afirmativo estudiar su dimensión y su regularidad.

De entre los siguientes ejercicios, se pide elegir uno y sólo uno, de modo que a cada estudiante se le corregirá un máximo de cuatro ejercicios.

4-A) Estudiar si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\cos y + \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{6}\operatorname{sen} x \cos y + \frac{1}{2}\cos x \right),$$

tiene algún punto fijo. ¿Tiene más de uno? Razonar la respuesta.

4-B)

(a) Sea D una región en el plano en la que es válido el Teorema de Green, y sea $f \in C^2(D)$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en D. Demostrar que, si denotamos por ∂D la curva frontera de D, se tiene

$$\int_{\partial D} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,,\ -\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0.$$

(b) Dada $F \in C^2(D)$, demostrar la identidad

$$\int_{\partial D} F\langle \nabla F, \vec{n}\rangle = \int\int_D (F\Delta F + \langle \nabla F, \nabla F\rangle)dxdy,$$

donde $\vec{n}$ es el vector perpendicular a la curva ∂D, y $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.