PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS

CÁLCULO II, 2010-11

Algunas preguntas modelo para el cuarto examen parcial (versión revisada y ampliada)

Las preguntas en el verdadero examen pueden variar tanto en el contenido como en el formato respecto a esta muestra orientativa.

---

1. Cambiar el orden de integración en $I = \int_0^3 \left(\int_0^{x^2/3} f(x,y)dy\right) dx$ y esbozar el recinto de integración.

---

2. [*Pregunta de tipo test. Elíjase la respuesta correcta.*]
La región descrita en coordenadas polares como

$$E = \{r < 2\cos\theta\,, |\theta| < \frac{\pi}{2}\}$$

es un disco, $B(c,r)$, de centro c y radio r. ¿Cuál de los siguientes?
(A) $B(0,1)$, (B) $B(1,1)$, (C) $B(0,2)$, (D) $B(1,2)$,
(E) ninguno de los anteriores.

---

3. [*Pregunta de tipo test. Elíjase la respuesta correcta.*]
Las ecuaciones

$$x = \cosh u \cos v\,, \quad y = \cosh u \operatorname{sen} v\,, \quad z = \operatorname{senh} u$$

definen una representación paramétrica de la siguiente superficie conocida:
(A) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, (B) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$,
(C) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (D) $x - y - z = 1$,
(E) ninguna de las anteriores.

---

4. Sea $R = [0, \pi/2] \times [0,1]$. Calcular la integral

$$\int_R y \cos(xy)\, dx\, dy$$

buscando el método más fácil posible.

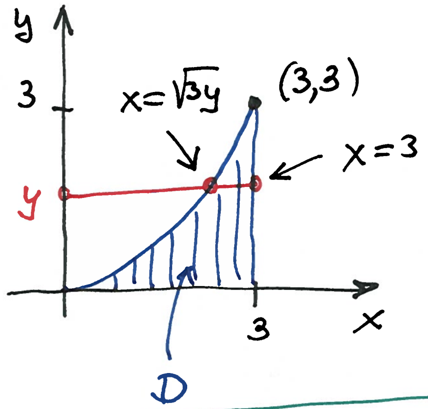
5.
(a) Explicar qué curva representa el conjunto

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 4\,, z = y + 3\}$$

y describirlo en coordenadas cilíndricas.
(b) Esbozar el sólido E comprendido entre el cilindro $x^2+y^2 = 4$, encima del plano xy y debajo del plano $z = y + 3$.
(c) Calcular el volumen $V(E)$ sin emplear el teorema del cambio de variable (es decir, usando sólo el teorema de Fubini o el principio de Cavalieri).

SOLUCIONES

(1.) Recinto de integración: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 3,\ 0\le y\le \frac{x^2}{3}\}$.



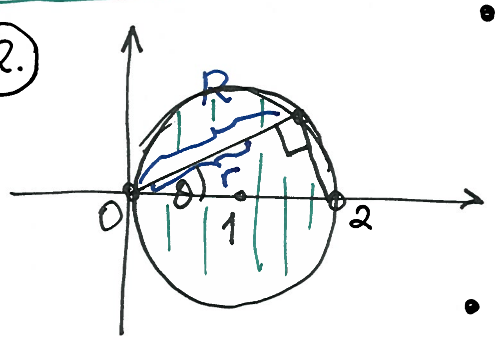
$x=3:\ y=\frac{x^2}{3}=3$.

$y=\frac{x^2}{3},\ x\geq 0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3y}$.

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 3,\ \sqrt{3y}\le x\le 3\}$.

$\Rightarrow I=\int_0^3\left(\int_{\sqrt{3y}}^{3} f(x,y)\,dx\right)dy$.

(2.)



- $0<r<R;\quad \frac{R}{2}=\cos\theta \Leftrightarrow R=2\cos\theta$

  $\Rightarrow 0<r<2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

  describe los puntos en el disco sombreado en verde, $B(1,1)$.

- solución alternativa: $r<2\cos\theta \Leftrightarrow$

$r^2<2r\cos\theta \Leftrightarrow x^2+y^2<2x \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2<1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2<1$

$\Leftrightarrow (x,y)\in B(1,1)$. $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ significa: $y>0$; se cumple.

Respuesta: (B)

(3.) Recordando que $\operatorname{sen}^2 v+\cos^2 v=1$, vemos que

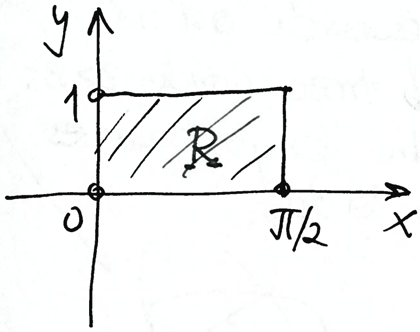
$x^2+y^2=\cosh^2 u$.

(Conviene recordar que $\cosh u=\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}$; es una función par y positiva; $\operatorname{senh} u=\dfrac{e^u-e^{-u}}{2}$, fcn impar que toma todos los valores reales; además, es fácil comprobar que $\cosh^2 u-\operatorname{senh}^2 u=1,\ \forall u\in\mathbb{R}$).

Luego $1=\cosh^2 u-\operatorname{senh}^2 u=x^2+y^2-z^2$.

Respuesta: (A)

4. Observemos que $y\cos(xy) = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen}(xy)$, lo cual nos da la pista de integrar primero respecto a x.



(por Fubini:)

$$I = \iint_R y\cos(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} y\cos(xy)\,dx \right) dy$$

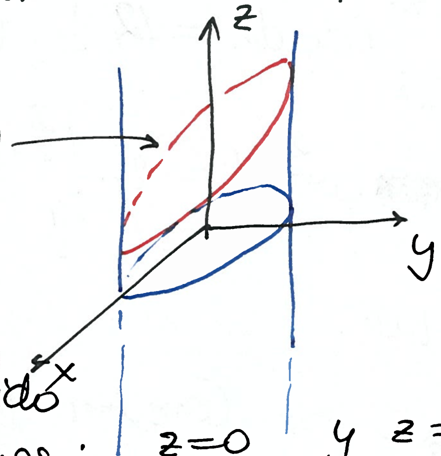
$$= \int_0^1 \left(\operatorname{sen}(xy)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2}\,dy = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}\Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{2}{\pi}.$$

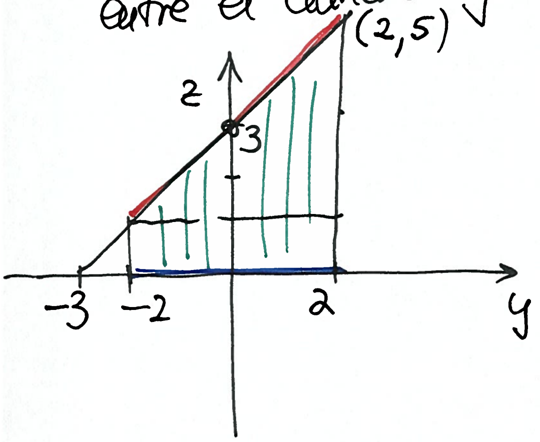
---

5. (a) $\{(x,y,z): x^2+y^2=4,\ z=y+3\} = \{x^2+y^2=4\} \cap \{z=y+3\}$, la intersección de un cilindro vertical con un plano inclinado. Es una elipse.

(elipse)

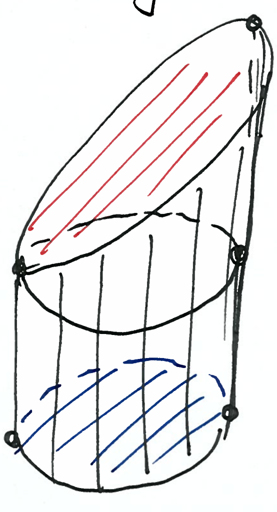


(b) El dibujo es, esencialmente, el anterior: E está comprendido entre el cilindro y los dos planos: $z=0$ y $z=y+3$ (la "tapa inferior" es el disco azul y la "tapa superior", la elipse roja).

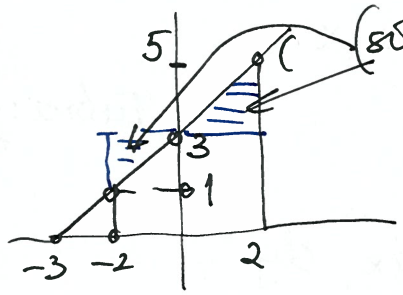


← Proyección al plano yz

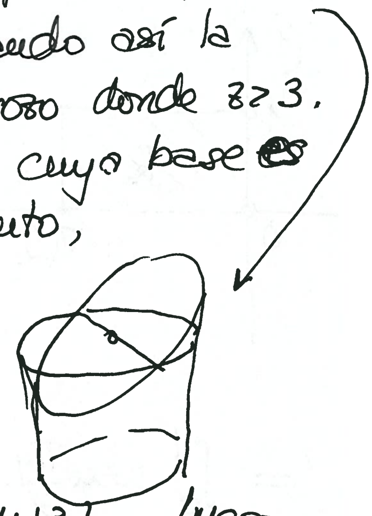
(Podríamos decir que se parece a un pintalabios.)



(c) • La forma más rápida: geométricamente



(sólidos congruentes.) Podemos "aplanar" el sólido E, quitando la parte superior al plano $z=3$, compensando así la zona donde $z<3$ con el trozo donde $z \geq 3$. Obtenemos así un cilindro cuya base es un disco de radio 2 y cuya altura es 3. Por tanto,



$$V(E) = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi .$$

• Una manera habitual: por Fubini.

$E = \{(x,y,z) : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ 0 \leq z \leq y+3\}$, luego

$$V(E) = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{0}^{y+3} 1\, dz\right) dy\right) dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (\underbrace{y}_{\text{impar}}+\underbrace{3}_{\text{par}})\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 6\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 1\, dy\, dx = 12\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\, dx \longleftarrow$$

Cambio de variable: $x = 2\,\text{sen}\, t,\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$dx = 2\cos t\, dt$; $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2\cos t$

$$= 12 \cdot 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 24 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= 24 \cdot \frac{\pi}{2} = 12\pi .$$

• Otra manera: por Cavalieri (más complicado).