PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS

CÁLCULO II, 2010-11

Algunas preguntas modelo para el tercer examen parcial: SOLUCIONES

---

1. *(a) Escribir la fórmula de Taylor de primer orden para la función* $f(x,y) = x\cos y$ *en el punto* $(1,0)$.

(b) Calcular la matriz Hessiana de la función f *del apartado (a) en el mismo punto.*

(c) Calcular la matriz Jacobiana de la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y) = (x\cos y, x \operatorname{sen} y, x^2 - y).$$

SOLUCIÓN: (a) Tenemos los siguientes datos:

$$f(1,0) = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos y, \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \operatorname{sen} y, \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

Por tanto, la fórmula de Taylor de primer orden en el punto $(1,0)$ es:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0) + R_2(x,y) \\ &= 1 + (x-1) + R_2(x,y) = x + R_2(x,y), \end{aligned}$$

donde $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{R_2(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 0$.

(b) La matriz Hessiana es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} y & -x\cos y \end{bmatrix}$$

(c) La función va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$; por tanto, su matriz Jacobiana es una matriz 3×2, a saber:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos y & -x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen} y & x\cos y \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$$

---

2. [*Pregunta de tipo test. Elíjase la respuesta correcta.*]

La ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$ *en el punto* $(2,1,0)$ *es la siguiente:*

(A) $4x+8y-z = 16$; *(B)* $4x-8y-z = 0$; *(C)* $-4x+8y-z = 16$;
(D) $4x + 8y - z = 0$; *(E) otra.*

$\boxed{\text{E}}$

JUSTIFICACIÓN: Estamos considerando la superficie de nivel 0 de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 - z^2$. El gradiente de f en el punto genérico (x,y,z) es $\nabla f(x,y,z) = (2x, -8y, -2z)$; por tanto, $\nabla f(2,1,0) = (4,-8,0)$. La ecuación del plano tangente es:

$$4 \cdot (x-2) - 8 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-0) = 0\,.$$

Es decir, $4x - 8y = 0$.

---

3. [*Pregunta de tipo test. Elíjase la respuesta correcta.*]
La función $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ tiene en el origen:
(A) un mínimo local, *(B) un máximo local,*
(C) un punto silla, *(D) un punto crítico degenerado,*
(E) el origen no es un punto crítico de f.

$\boxed{\text{A}}$

JUSTIFICACIÓN: Por supuesto, existen varias soluciones elementales, por ejemplo:

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 = f(0,0)\,,$$

luego f alcanza en el origen su mínimo absoluto.

Aunque nos proporciona una respuesta muy precisa, esta solución no es la que más nos interesa en este tema ya que preferimos un método general aplicable a otras situaciones. Veamos entonces la solución alternativa sistemática que funciona para otros ejemplos.

Primero hay que comprobar si el origen es un punto crítico de f o no. Las derivadas parciales de primer orden en $(0,0)$ deben cumplir las condiciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0\,.$$

Es obvio que el origen cumple este sistema, luego es un punto crítico de f.

Pasamos a calcular la matriz Hessiana de f:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como es constante, es la misma en el punto crítico $(0,0)$. Sus menores principales son:

$$\Delta_1 = 2 > 0\,, \qquad \Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0\,.$$

Según el criterio de Sylvester, la forma Hessiana bilineal (cuadrática) asociada es definida positiva. Por el criterio de la forma Hessiana para las derivadas de orden segundo, esto significa que $(0,0)$ es un punto de mínimo local estricto de f.

---

4. *Hallar el punto de la superficie $x^2 + y + z = 1$ más próximo al origen.*

SOLUCIÓN: Queremos minimizar la distancia hasta el origen de los puntos (x,y,z) en la superficie. Para ello, es suficiente minimizar el cuadrado de la distancia, que es más fácil de manejar. Por tanto, buscamos el mínimo de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ condicionado por $x^2 + y + z = 1$.

Una manera muy eficaz de hacer esto es la siguiente: despejamos la variable x de la condición, obteniendo $x^2 = 1 - y - z$. Sustituyendo esta expresión en la función, obtenemos una función (sencilla y diferenciable con continuidad) de sólo dos variables:

$$g(y,z) = 1 - y - z + y^2 + z^2\,.$$

Para buscar los puntos críticos, calculamos el gradiente y lo igualamos a cero:

$$\nabla g(y, z) = (2y - 1, 2z - 1) = (0, 0) .$$

De aquí vemos que el único punto crítico es $(y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

La matriz Hessiana de f en cualquier punto (y, z) (y, por tanto, también en nuestro punto crítico) es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Obviamente, $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$. Por el criterio de la forma Hessiana, f tiene un mínimo en el punto crítico.

Teniendo en cuenta que $y = z = \frac{1}{2}$ y $x^2 = 1 - y - z$ implican que $x = 0$, se sigue que el punto en nuestra superficie más próximo al origen es

$$(x, y, z) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) .$$

Observación. La eliminación, por ejemplo, de la variable z de la condición $x^2 + y + z = 1$ nos hubiera llevado a una matriz Hessiana degenerada y entonces habríamos necesitado un trabajo adicional (posiblemente, muy complicado) para decidir si se trata de un punto de mínimo o no. Conviene evitar esas situaciones. Por lo tanto, en un problema de extremos condicionados de este tipo la cuestión "¿qué variable despejar de la condición?" no es irrelevante.

---

5. *Calcular la longitud de arco de la curva*

$$\sigma(t) = (\frac{2}{3}t\sqrt{t}, \cos t, -\operatorname{sen} t)$$

entre los puntos $(0, 1, 0)$ *y* $(\frac{2}{3}, \cos 1, \operatorname{sen} 1)$.

SOLUCIÓN: Calculamos la longitud del vector tangente:

$$\sigma'(t) = (\sqrt{t}, -\operatorname{sen} t, -\cos t) , \qquad \|\sigma'(t)\| = \sqrt{t + 1}$$

Los puntos $(0, 1, 0)$ y $(\frac{2}{3}, \cos 1, \operatorname{sen} 1)$ se corresponden con los valores $t = 0$ y $t = 1$, respectivamente. Por tanto, la longitud de arco entre los puntos indicados es

$$L(\sigma) = \int_0^1 \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \sqrt{t + 1} \, dt = \frac{2}{3}(t + 1)^{3/2}|_0^1 = \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1) .$$
