PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS

CÁLCULO II, 2010-11

Algunas preguntas modelo para el segundo examen parcial

Las preguntas en el verdadero examen pueden variar tanto en el contenido como en el formato respecto a esta muestra orientativa.

---

1. Definamos la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5xy}{2x^2+3y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 1, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) Razonar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ o no.

(b) Decidir si f es continua o no en $(0,0)$ y explicar por qué.

---

2. [*Pregunta de tipo test. Elíjase la respuesta correcta.*]

Utilizando la desigualdad $(|x|-|y|)^2\geq 0$, como en algunos ejercicios vistos en clase, podemos deducir que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$:

(A) no existe, (B) existe como valor infinito, (C) existe y es $=0$,

(D) existe y es $=1$, (E) no se sigue ninguna de esas conclusiones.

---

3. Explicar de forma breve pero rigurosa por qué el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2y\cos(xy)<x^2-y^2+1\}$$

es abierto.

---

4. Definamos la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^{1/4}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(a) [*Marcar sólo una respuesta, sin justificación.*] El vector gradiente de f en un punto $(x,y)\neq(0,0)$ es el siguiente:

(A) $\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/4}},\frac{2y}{(x^2+y^2)^{3/4}}\right)$, (B) $\left(\frac{x}{2(x^2+y^2)^{1/4}},\frac{y}{2(x^2+y^2)^{1/4}}\right)$,

(C) $\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^{1/4}},\frac{2y}{(x^2+y^2)^{1/4}}\right)$, (D) $\left(\frac{x}{2(x^2+y^2)^{3/4}},\frac{y}{2(x^2+y^2)^{3/4}}\right)$,

(E) $\left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^{1/4}},\frac{2x}{(x^2+y^2)^{1/4}}\right)$.

(b) Decidir si existe o no la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, justificando la respuesta.

(c) Decidir razonadamente si f es diferenciable o no en el punto $(0,0)$, indicando el resultado utilizado.

(d) ¿En qué dirección se registra el crecimiento máximo de la función f en el punto $(0,1)$? Para determinar dicha dirección, elegir un vector $\vec{v}$ de norma 1. Justificar la respuesta.

---

5. [*Pregunta de tipo test. Elíjase la respuesta correcta.*]
Si $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria de clase C^1, donde

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \neq (0,0,0)$$

y $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la función definida mediante la fórmula $h(t) = \|c(t)\|^2$, la derivada $h'(t)$ viene dada por:

(A) $x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt} + z(t)\frac{dz}{dt}$, (B) $2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt} + 2z(t)\frac{dz}{dt}$,

(C) $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$, (D) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, (E) otra fórmula.

6. Una partícula se mueve según la ley

$$\gamma(t) = (t, t^2, -t), \quad -1 \leq t \leq 2\,.$$

Compruébese que se trata de una trayectoria diferenciable y hállese el valor del parámetro t para que la velocidad en el punto $\gamma(t)$ sea mínima.