Hoja 9

Integrales de línea. Fórmula de Green. Campos vectoriales

1.- Para la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$, calcular la integral $\displaystyle\int_\sigma f\, ds$, donde $f(x, y, z) = x + y + z$.

2.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x, y)\, ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(a) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1 - x|$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$.

(b) $F(x, y) = (x + y, x - y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida una vez en el sentido contrario al de las manillas del reloj.

3.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - y^2)\, dy$, donde Γ es el contorno del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, orientado positivamente.

4.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma y\, dx + x^2\, dy$, cuando Γ es:

(a) la circunferencia $x^2 + y^2 = a\, x$; (b) la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

5.- Hallar el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ (es decir, la integral de línea) al recorrer el contorno del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el sentido negativo.

6.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4 - x^3e^x - y)\, dx + (x - y \arctan y)\, dy$, donde Γ viene dado como sigue: dados los puntos $A = (2, 0)$, $B = (1, -1)$ y $C = (0, -1)$ de $\mathbb{R}^2$, Γ es el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1, y los segmentos orientados BC, CO, OA (O es el origen de coordenadas).

7.- Sean $r > 0$, $D = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$ y ∂D su frontera orientada en positivamente. Usando primero el teorema de Green y luego las coordenadas polares, calcular la integral $\displaystyle\int_{\partial D} xy^2\, dy - yx^2\, dx$.

8.- Evaluar $\displaystyle\int_\Gamma (2\, x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy$, donde Γ es el círculo unidad orientado en el sentido negativo.

9.- Verificar el teorema de Green para el campo (P, Q) con $P(x, y) = 2\, x^3 - y^3$ y $Q(x, y) = x^3 + y^3$ y la región anular (corona) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\, a^2$.

10.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1, simple y cerrada en el plano y orientada en el sentido positivo. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma x\, dy - 4y\, dx$ en función de A.

11.- Comprobar si el campo vectorial $F(x, y) = 2xy\, \mathbf{i} + (x^2 - y)\, \mathbf{j}$ es conservativo y, si procede, hallar una función potencial para F.

12.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x, y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(a) $F(x, y) = (3\, x^2y, x^3)$ (b) $F(x, y) = (\operatorname{sen} x\, y + x\, y\, \cos x\, y, x^2 \cos x\, y)$

(c) $F(x, y) = (2\, x\, e^y + y, x^2\, e^y + x - 2\, y)$.

Integrales sobre superficies

13.- Hallar el área del helicoide definido por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ donde $\Phi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha, \alpha)$ y D es la región en el plano donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

14.- Un toro (o rosquilla) T se puede representar paramétricamente por la función $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, donde Φ viene dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos \phi) \cos \theta$, $y = (R + \cos \phi) \operatorname{sen} \theta$, $z = \operatorname{sen} \phi$, donde $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, esto es $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Calcular el área de T.

15.- Demuéstrese que la superficie $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $1 \leq z < \infty$, tiene volumen finito y área infinita ("se puede llenar pero no se puede pintar").

16.- Calcular la integral de superficie $I = \displaystyle\iint_S (x + z)\, dS$, donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$, perteneciente al primer octante, de dos maneras:

(a) considerando S como la gráfica de una función de las variables x e y y expresando I como una integral doble;

(b) parametrizando la superficie de otra manera (por ejemplo, usando como parámetros la coordenada x y el ángulo θ de las coordenadas polares en el plano yz.

17.- Sea S la esfera unidad $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ orientada hacia el exterior y $F(x, y, z) = (x^3, y^3, -3z)$. Evaluar la integral de superficie $\displaystyle\iint_S F \cdot dS$.

18.- Hallar la integral del campo $\vec{F} = 5\vec{\mathbf{k}}$ sobre la esfera unidad con la orientación inducida por la normal exterior.

19.- Sea T la región acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F} = (x, y, 3)$ hacia el exterior de T.