

## Hoja 7

## Integración dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea  $f$  la función definida para  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que  $f$  no es integrable en el rectángulo  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

2.- Definimos  $f(x, y)$  en el cuadrado  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$  existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante,  $f$  no es integrable en  $Q$ .

3.- Demostrar la existencia de la integral  $\iint_Q f(x+y) dx dy$ , donde  $Q = [0, 2] \times [0, 2]$  y  $f(t) = [t]$  representa el mayor número entero  $\leq t$ . Hallar el valor de la integral.

4.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar, en cada caso, la existencia de la integral.

$$\begin{aligned} (a) \iint_Q x^2 e^y dx dy, \quad Q = [-1, 1] \times [0, \log 2]; & \quad (b) \iint_Q \operatorname{sen}(x+y) dx dy, \quad Q = [0, \pi] \times [0, \pi]; \\ (c) \iint_Q |xy| dx dy, \quad Q = [-1, 2] \times [1, 3]; & \quad (d) \iint_Q \operatorname{sen}^2(3x-2y) dx dy, \quad Q = [0, \pi] \times [0, \pi]. \end{aligned}$$

5.- Para cada una de las siguientes funciones  $f$  definidas en el rectángulo  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ , se pide representar el conjunto de los valores  $f(x, y)$  sobre  $Q$  y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in Q : f \text{ no es continua en } (x, y)\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} 1 - (x+y) & \text{si } x+y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

6.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor:

$$\iint_{\Omega} x \cos(x+y) dx dy,$$

siendo  $\Omega$  el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  y  $(\pi, \pi)$ .

7.- Calcular  $\iint_D y dx dy$ , donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 2x/\pi \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$ .

- 8.- Calcular la integral  $\iint_D x^3 y \operatorname{sen} \frac{\pi y^2}{x} dx dy$ , donde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .
- 9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano  $x + 2y + 3z = 6$ . Dibujar esta pirámide y luego calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.
- 10.- (a) Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 10$ .  
 (b) Lo mismo para la región acotada por la gráfica  $z = e^{-x^2}$  y los planos  $y = 0$ ,  $y = x$  y  $x = 1$ .
- 11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva  $f$  sobre la región  $\Omega$  se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región  $\Omega$  e invertir el orden de integración.

$$(a) \int_0^2 \left( \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right) dy. \quad (b) \int_1^4 \left( \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx,$$

$$(c) \int_1^e \left( \int_0^{\log x} f(x, y) dy \right) dx. \quad (d) \int_0^\pi \left( \int_{-\operatorname{sen} x/2}^{\operatorname{sen} x} f(x, y) dy \right) dx.$$

- 12.- Invertiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy.$$

- 13.- Observando que  $\iint_{[a,b] \times [a,b]} f(x)f(y) dx dy = \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2$ , demostrar que

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) dx dy = \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2.$$

- 14.- Si  $D = [-1, 1] \times [-1, 2]$ , probar que

$$1 \leq \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1} \leq 6.$$

- 15.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a)  $\iiint_Q (2x + 3y + z) dx dy dz$ , con  $Q = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$ .

(b)  $\iiint_T x^2 \cos z dx dy dz$ , siendo  $T$  la región limitada por los planos  $z = 0, z = \pi, y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 1$ .

(c)  $\iiint_\Omega x y^2 z^3 dx dy dz$ , siendo  $\Omega$  el sólido limitado por la superficie  $z = xy$  y los planos  $y = x, x = 1$  y  $z = 0$ .

- 16.- En cada uno de los siguientes casos, la integral  $\int_\Omega f(x, y, z) dx dy dz$  de la función positiva  $f$  se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y su proyección sobre el plano  $z = 0$ . Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden  $dz dx dy$ .

(a)  $\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^y f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$       (b)  $\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

(c)  $\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$       (d)  $\int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$