Hoja 6

Curvas y superficies parametrizadas

1.- Hallar el vector tangente (normalizado) a la trayectoria $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe la recta tangente en el punto $(0, 0)$?

2.- Para las siguientes trayectorias, hallar la velocidad, la rapidez (es decir, la longitud del vector velocidad), la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el punto correspondiente al valor de t dado:

(a) $\gamma(t) = \big(e^{-t} \operatorname{sen} t, e^{-t} \cos t\big), \quad t = 2\pi.$ (b) $\sigma(t) = \big(e^{-2t} \operatorname{sen}(2t), e^{-2t} \cos(2t), e^{-2t}\big), \quad t = \dfrac{\pi}{2}.$

3.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

(a) $\sigma(s) = (s, 4s, s^2)$, $0 \le s \le 4$.

(b) $\sigma(u) = \big(e^{-u} \cos u, e^{-u} \operatorname{sen} u\big)$, $0 \le u < +\infty$.

4.- Dibujar el arco de cicloide descrito por $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \cos t)$, con $0 \le t \le 2\pi$ y hallar su longitud.

5.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 3t\big) & \text{si} \quad 0 \le t \le \pi, \\ \big(-1, -t + \pi, 3t\big) & \text{si} \quad \pi \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

7.- Hallar la ecuación del plano tangente a las siguientes superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (4u, 3u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0, 1, 6)$.

(b) $\Phi(u, v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1)$ en $(0, 1, 1)$.

(c) $\Phi(u, \theta) = (\cosh u \cos\theta, \cosh u \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} u)$ en $(0, 1, 0)$.

(d) $\Phi(u, v) = (u^2 + 1, v^2 + 1, u^2 + v^2)$ en $\Phi(1, 1)$.

8.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$ con $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \pi$.

(b) $\Phi(r, \theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r)$ con $0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le \pi$.

9.- Dada la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerándola como:

(a) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta, \varphi) = (2 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, 2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, 2 \cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

(b) Superficie de nivel 4 de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Gráfica de la función $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x, y) \in D = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\big\}$.

10.- (a) Hallar un parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (c).