

Hoja 3

1.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

(a) $f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(xy^2)} - \ln^2 x$, definida para los (x, y) tales que $x > 0$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 y e^z - y^2 \operatorname{sen}(xz)$, definida en \mathbb{R}^3 .

(c) $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, definida en los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$.

(d) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x - y}{1 + xy}$, definida para los (x, y) tales que $xy \neq -1$.

2.- Determinar los puntos en los que existen las derivadas parciales de primer orden de la función $f(x, y) = |x|y^2$ y calcular dichas derivadas.

3.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales en el origen pero no es continua ahí.

4.- Considérese la función definida en los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x, y) = \frac{x y^2}{x^2 + y^4} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0, y) = 0.$$

(a) Demostrar que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existen y calcular su valor.

(b) ¿Es $f(x, y)$ continua en $(0, 0)$?

(c) ¿Es $f(x, y)$ diferenciable en $(0, 0)$?

(d) Hallar la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0, 0)$ para cada dirección $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

5.- Demuéstrese que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en el origen.

6.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$ que no son continuas en el punto $(0, 0)$ y que, sin embargo, $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$.

7.- Demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es diferenciable en cualquier punto del plano \mathbb{R}^2 .

8.- Estúdiense la diferenciabilidad en el origen de la función

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2}$.

9.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x, y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1, 2)$.

(b) $f(x, y) = (\sin(x + y), \cos(x - y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(c) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(d) $f(x) = (e^x \sin x, e^x \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

(e) $f(x, y, z, t) = (\sqrt{y^2 + z^2}, \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + y^2 + z^2 - 9t^2)$, $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$.

10.- Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones escalares dadas por $g(x) = \|x\|^4$ y $f(x) = \langle a, x \rangle$, siendo $a \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo.

(a) Hallar las derivadas direccionales $D_v f(x)$ y $D_v g(x)$ para cada $x, v \in \mathbb{R}^n$.

(b) Tomando $n = 2$, hallar todas las direcciones $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tales que $D_{(u,v)} g(2, 3) = 6$.

(c) Tomando $n = 3$, hallar todas las direcciones $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tales que $D_{(u,v,w)} g(1, 2, 3) = 0$.

11.- Sea $f(r, t) = t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$, definida en los $r \geq 0$ y $t > 0$. Hallar un valor de la constante n tal que $f(r, t)$ satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (r, t > 0).$$

12.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a) $f(x, y) = e^{-y} \cos x$.

(b) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

(c) $f(x, y) = xy \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.

13.- (a) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + 5y^2}$ en el origen.

(b) Comprobar que f es diferenciable en todos los demás puntos del plano.

(c) Calcular el vector $\nabla f(2, 1)$.

14.- Hallar los puntos (x, y) y las direcciones $\mathbf{v} = (u, v)$ unitarias en los cuales la derivada direccional $D_{\mathbf{v}} f(x, y)$ de la función $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ tiene un máximo, sabiendo que (x, y) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

15.- Hallar los valores de a, b, c tales que la derivada direccional de

$$f(x, y, z) = ax^2y^2 + byz + cx^3z^2$$

en el punto $(1, 2, -1)$ tenga un valor máximo de 64 en la dirección paralela al eje Z .

16.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que $D_{\mathbf{u}} f(a) = 1/\sqrt{13}$ y $D_{\mathbf{v}} f(a) = \sqrt{2}$, siendo $\mathbf{u} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ y $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(a) Calcular el gradiente $\nabla f(a)$.

(b) Hallar las dos direcciones unitarias \mathbf{w} para las cuales $D_{\mathbf{w}} f(a) = 0$.

17.- Hallar la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 - 3xy$ a lo largo de la parábola $y = x^2 - x + 2$ en el punto $(1, 2)$.