Cálculo II (PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS), 2010-11

Examen parcial 2, 15/03/2011

SOLUCIONES

Modelo 1

---

*Las preguntas **1–3** son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntar sólo una letra adecuada (A, B, C o D) en la casilla correspondiente.*
Cada respuesta correcta vale 2 puntos, incorrecta o doble: -0,5 puntos, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(A) no tiene límite, ni finito ni infinito, en el origen ; (B) tiene límite infinito en el origen ;
(C) tiene límite finito en $(0,0)$ pero no es continua ahí ; (D) es continua en el origen .

C

JUSTIFICACIÓN: Primero observemos que $y^2 \le x^2 + y^2$, luego

$$0 \le \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}|x| \le |x| \to 0 \,, \qquad (x,y) \to (0,0)\,.$$

Por tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Sin embargo, este límite es diferente de $1 = f(0,0)$, así que la función f no es continua en el origen.

---

2. La dirección de crecimiento máximo de la función

$$f(x,y) = e^{-x}\cos y\,,$$

en el punto $(0,\pi/2)$ viene dada por el siguiente vector normalizado:

(A) $\dfrac{-\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$; (B) $\mathbf{i}$; (C) $-\mathbf{j}$; (D) otro .

C

JUSTIFICACIÓN: La dirección que se pide viene dada por la dirección del vector gradiente en el punto indicado. El vector gradiente en un punto arbitrario (x,y) es:

$$\nabla f(x,y) = (-e^{-x}\cos y, -e^{-x}\operatorname{sen} y)$$

y en el punto $(0,\pi/2)$ es:

$$\nabla f(0,\pi/2) = (-\cos\pi/2, -\operatorname{sen}\pi/2) = (0,-1) = -\mathbf{j}\,.$$

3. Sean $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ dos funciones diferenciables de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(u, v) = \cos u + uv.$$

El valor de la derivada parcial $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ es:

(A) $(-\operatorname{sen} u + v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial x}$; (B) $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + (-\operatorname{sen} u + v)\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

(C) $(-\operatorname{sen} u + v)\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\dfrac{\partial v}{\partial x}$; (D) $(-\operatorname{sen} u + v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

$\boxed{\text{A}}$

JUSTIFICACIÓN: Tenemos el siguiente diagrama de dependencia entre Φ, u, v y x:

$$\begin{array}{ccc} & \Phi & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ u & & v \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & x & \end{array}$$

Por tanto, según la Regla de la Cadena, deducimos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (-\operatorname{sen} u + v)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Obsérvese que tanto u como v dependen también de y, no sólo de x; de ahí que la derivada respecto a x tiene que ser una derivada parcial.)

El último ejercicio es de desarrollo. Se pide presentar una solución razonada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

4. [4 = 1,5 + 2,5 puntos] Dada la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^2},$$

(a) Calcúlese $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

(b) Decídase razonadamente si f es diferenciable en el origen o no.

RESPUESTA: (escríbase SÍ o NO $\to$) $\boxed{\text{NO}}$

JUSTIFICACIÓN: (a) Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h^2|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0.$$

(b) Para que f sea diferenciable en el origen, es imprescindible que exista también la derivada parcial respecto a y en el origen. Sin embargo, se comprueba fácilmente que

$$\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & \text{si } h < 0 \\ 1, & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

y, por tanto, no existe

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \,.$$

Por consiguiente, la función f no es diferenciable en el origen.

Modelo 2

---

*Las preguntas **1–3** son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntar sólo una letra adecuada (A, B, C o D) en la casilla correspondiente.*
Cada respuesta correcta vale 2 puntos, incorrecta o doble: -0,5 puntos, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la función $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ -1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(A) es continua en el origen ; (B) tiene límite finito en $(0,0)$ pero no es continua ahí ;
(C) tiene límite infinito en el origen ; (D) no tiene límite, ni finito ni infinito, en$(0,0)$.

B

JUSTIFICACIÓN: Primero observemos que $x^2 \leq x^2 + y^2$, luego

$$0 \leq \left| \frac{x^3 y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2|xy|}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|xy| \leq |xy| \to 0 \,, \qquad (x,y) \to (0,0)\,.$$

Por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Como este límite es diferente de $-1 = f(0,0)$, la función f no es continua en el origen.

---

2. Si el movimiento de una partícula se describe por la trayectoria

$$\gamma:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \gamma(t) = (t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t)\,,$$

entonces su vector de velocidad en el punto $(\pi, 1, 0)$ tiene longitud:

(A) $\sqrt{5}$; (B) $\sqrt{\pi^2+1}$; (C) $\sqrt{2}$; (D) otro valor .

A

JUSTIFICACIÓN: El vector velocidad es $\gamma'(t) = (1, -2\operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t)$. Su longitud (norma) es

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4\operatorname{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t} = \sqrt{5}\,,$$

---

3. Sean $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ dos funciones diferenciables de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(u,v) = \operatorname{sen} u + uv .$$

El valor de la derivada parcial $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ es:

(A) $(\cos u + v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial y}$; (B) $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + (\cos u + v)\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

(C) $(\cos u + v)\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\dfrac{\partial v}{\partial x}$; (D) $(\cos u + v)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

D

JUSTIFICACIÓN: Tenemos el mismo diagrama de dependencia entre Φ, u, v y x que en el ejercicio **3** del Modelo 1. Por tanto, Según la regla de la Cadena, tenemos que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (\cos u + v)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} .$$

(Puesto que ambas u y v dependen también de y, la derivada respecto a x tiene que ser una derivada parcial.)

El último ejercicio es de desarrollo. Se pide presentar una solución razonada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

4. [4 = 1,5 + 2,5 puntos] Dada la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^4},$$

(a) Calcúlese $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Decídase razonadamente si f es diferenciable en el origen o no.

RESPUESTA: (escríbase SÍ o NO $\to$)

NO

JUSTIFICACIÓN: (a) Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h^2|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0 .$$

(b) Nos preguntamos si existe la derivada parcial respecto a x en el origen. Es fácil comprobar que

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & \text{si } h < 0 \\ 1, & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

y, por tanto, no existe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} .$$

Por consiguiente, la función f no es diferenciable en el origen.