Cálculo II (PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS), 2010-11

Examen parcial 1, 15/02/2011

Modelo 1

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1–3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ______________________________

D.N.I. O PASAPORTE: ______________________________

FIRMA: ____

---

*Las preguntas **1–3** son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntar sólo una letra adecuada (A, B, C, D o E) en la casilla correspondiente.*
Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos, incorrecta o doble: -0,1 punto, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. El ángulo entre los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{k} - \mathbf{j}$ (en $\mathbb{R}^3$) es

(A) $\pi/6$; (B) $\pi/4$; (C) $\pi/3$;
(D) $\pi/2$; (E) $2\pi/3$.

$\boxed{C}$

$\langle i-j, k-j\rangle = \langle (0,-1,0), (0,-1,1)\rangle = 1$; $\|i-j\| = \|k-j\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos\measuredangle = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \measuredangle = \frac{\pi}{3}$

---

2. La curva de nivel $h = 6$ de la función $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 5$ es del siguiente tipo:

(A) un punto; (B) una elipse; (C) una parábola;
(D) una hipérbola; (E) la unión de dos rectas.

$\boxed{B}$

$x^2 + 4y^2 + 5 = 6$

$x^2 + 4y^2 = 1$

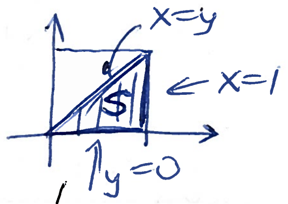
ELIPSE

---

3. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 1\}$ es:

(A) abierto; (B) abierto y cerrado a la vez; (C) compacto;
(D) cerrado pero no acotado; (E) acotado pero no cerrado.

$\boxed{C}$



$\partial S \subseteq S \Rightarrow S$ cerrado

S acotado

$\Downarrow$

compacto

El último ejercicio es de desarrollo. Se pide presentar una solución razonada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

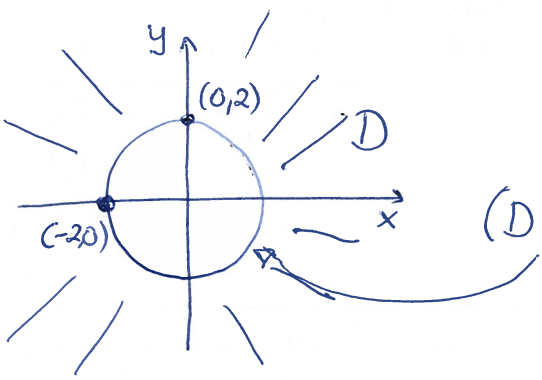
4. [1=0,3+0,3+0,4 puntos]
(a) Determinar razonadamente el dominio de definición, D, de la función

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2-4)\,.$$

$\exists \ln(x^2+y^2-4) \iff x^2+y^2-4>0 \iff x^2+y^2>4.$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2>4\} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}((0,0),2).$

(b) Representar gráficamente el conjunto D del apartado anterior, indicando si el punto $(-2,0)\in D$ o no.

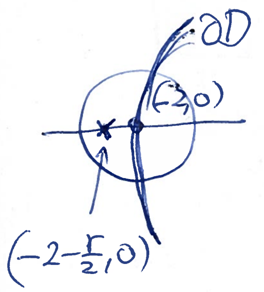


$(-2,0)\notin D$ ya que $(-2)^2+0^2>4$ es falso.

(D no incluye la circunferencia)

(c) ¿Es cierto que $(-2,0)\in\partial D$ o no? Justificar la respuesta.

Sí, es cierto. $(-2,0)\in\partial D \overset{\text{def'n}}{\iff} \forall r>0: \begin{cases} B((-2,0),r)\cap D\neq\emptyset \\ B((-2,0),r)\cap D^c\neq\emptyset. \end{cases}$



$(-2-\frac{r}{2},0)\in B((-2,0),r)\cap D$

p.q. $(-2-\frac{r}{2})^2+0^2=(2+\frac{r}{2})^2>2^2=4$ y

$\|(-2-\frac{r}{2},0)-(-2,0)\| = \|(-\frac{r}{2},0)\| = \frac{r}{2}<r.$

$(-2,0)\in B((-2,0),r)\cap D^c$ (ya que $(-2,0)\notin D$).

Cálculo II (PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS), 2010-11

Examen parcial 1, 15/02/2011

Modelo 2

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1–3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ______________________________

FIRMA: ____

*Las preguntas **1–3** son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntar sólo una letra adecuada (A, B, C, D o E) en la casilla correspondiente.*
Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos, incorrecta o doble: -0,1 punto, respuesta en blanco: 0 puntos.

1. El ángulo entre los vectores $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}-\mathbf{j}$ (en $\mathbb{R}^3$) es

(A) $\pi/6$; (B) $\pi/4$; (C) $\pi/3$;
(D) $\pi/2$; (E) $2\pi/3$.

$\langle i+j, k-j\rangle = \langle (1,1,0), (0,-1,1)\rangle = -1$
$\|i+j\| = \|k-j\| = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\measuredangle = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \measuredangle = \frac{2\pi}{3}$.

$\boxed{E}$

2. La curva de nivel $h = 6$ de la función $f(x,y) = x^2 - 4y^2 + 5$ es del siguiente tipo:

(A) un punto; (B) una elipse; (C) una parábola;
(D) una hipérbola; (E) la unión de dos rectas.

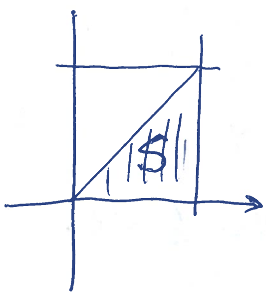
$x^2 - 4y^2 + 5 = 6$
$x^2 - 4y^2 = 1$
HIPÉRBOLA

$\boxed{D}$

3. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$ es:

(A) abierto; (B) abierto y cerrado a la vez; (C) compacto;
(D) cerrado pero no acotado; (E) acotado pero no cerrado.

$\boxed{A}$ (y también E)



S es abierto, no cerrado
acotado

El último ejercicio es de desarrollo. Se pide presentar una solución razonada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

4. [1=0,3+0,3+0,4 puntos]

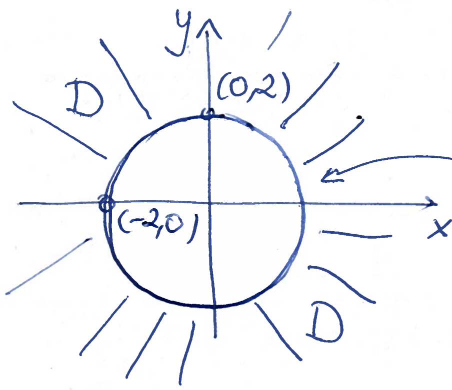
(a) Determinar razonadamente el dominio de definición, D, de la función

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}\,.$$

$$\exists \sqrt{x^2+y^2-4} \iff x^2+y^2-4 \geq 0 \iff x^2+y^2 \geq 4.$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\} = \mathbb{R}^2 \setminus B((0,0),2).$$

(b) Representar gráficamente el conjunto D del apartado anterior, indicando si el punto $(-2,0) \in D$ o no.



$(-2,0) \in D$ puesto que

$4 = (-2)^2 + 0^2 \geq 4$ es cierto.

circunferencia $\subseteq D$

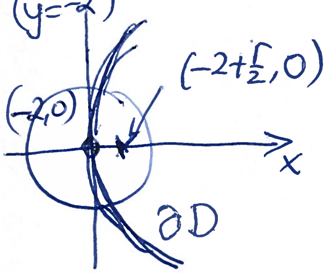
(c) ¿Es cierto que $(-2,0) \in \partial D$ o no? Justificar la respuesta.

Sí, es cierto.

$$(-2,0) \in \partial D \iff \forall r>0 \begin{cases} B((-2,0),r) \cap D \neq \emptyset \\ B((-2,0),r) \cap D^c \neq \emptyset. \end{cases}$$

P.ej., el punto $(-2,0) \in B((-2,0),r) \cap D$, mientras que

$(-2+\frac{r}{2},0) \in B((-2,0),r) \cap D^c$;



$$(-2+\tfrac{r}{2})^2 + 0^2 = (2-\tfrac{r}{2})^2 < 4 \quad (r \text{ pequeño})$$

$$\|(-2+\tfrac{r}{2},0)-(-2,0)\| = \|(\tfrac{r}{2},0)\| = \tfrac{r}{2} < r.$$

Cálculo II (PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS), 2010-11
Examen parcial 1, 15/02/2011

Modelo 3

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1–3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ________________________________

D.N.I. O PASAPORTE: ______________________________

FIRMA: ____

---

*Las preguntas **1–3** son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta en cada problema y apuntar sólo una letra adecuada (A, B, C, D o E) en la casilla correspondiente.*
Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos, incorrecta o doble: -0,1 punto, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. El ángulo entre los vectores $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (en $\mathbb{R}^3$) es

(A) $\pi/6$; (B) $\pi/4$; (C) $\pi/3$;
(D) $\pi/2$; (E) $2\pi/3$.

$\langle 2i-j+k, i+j-k\rangle = \langle (2,-1,1),(1,1,-1)\rangle$
$= 2-1-1 = 0$
$\Rightarrow$ son $\perp$
$\Rightarrow \measuredangle = \pi/2$.

$\boxed{D}$

---

2. La curva de nivel $h = 5$ de la función $f(x, y) = x^2 - 4y^2 + 5$ es del siguiente tipo:

(A) un punto; (B) una elipse; (C) una parábola;
(D) una hipérbola; (E) la unión de dos rectas.

$x^2-4y^2+5=5$
$x^2-4y^2=0$
$(x-2y)(x+2y)=0$
$x=2y$ ó $x=-2y$

$\boxed{E}$

---

3. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x\}$ es:

(A) abierto; (B) abierto y cerrado a la vez; (C) compacto;
(D) cerrado pero no acotado; (E) acotado pero no cerrado.

$\boxed{D}$

$\partial S \subseteq S$: cerrado
no acotado:
(p.ej., $(n,n) \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\|(n,n)\| = n\sqrt{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$,)

El último ejercicio es de desarrollo. Se pide presentar una solución razonada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

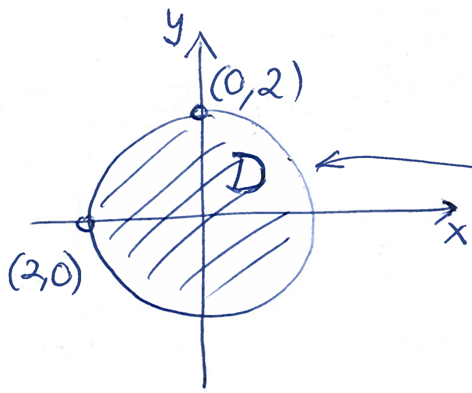
4. [1=0,3+0,3+0,4 puntos]
(a) Determinar razonadamente el dominio de definición, D, de la función

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,.$$

$$\exists \sqrt{4-x^2-y^2} \iff 4-x^2-y^2 \geq 0 \iff x^2+y^2 \leq 4.$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} = \overline{B}((0,0);2).$$

(b) Representar gráficamente el conjunto D del apartado anterior, indicando si el punto $(-2,0) \in D$ o no.



$(-2,0) \in D$ porque

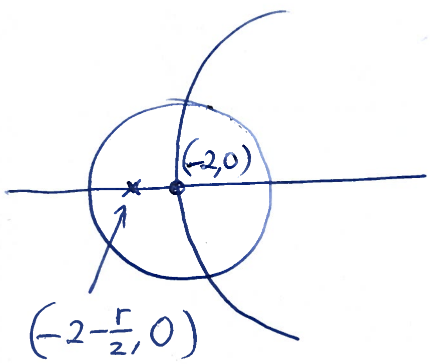
$(-2)^2 + 0^2 = 4 \leq 4.$

circunferencia $\subseteq D$.

(c) ¿Es cierto que $(-2,0) \in \partial D$ o no? Justificar la respuesta.

Sí, es cierto. El razonamiento es similar al de los otros modelos: $\forall r>0$,

$(-2,0) \in B((-2,0),r) \Rightarrow B((-2,0),r) \cap D \neq \emptyset$



$(-2-\frac{r}{2},0) \in B((-2,0),r) \cap D^c \Rightarrow$

$B((-2,0),r) \cap D^c \neq \emptyset.$

Luego $(-2,0) \in \partial D$.