## Estudio de máximos locales, mínimos locales y puntos silla de una función $f \in C^3(I\!R^2)$

CONDICIÓN NECESARIA: SER PUNTOS $P(x_0, y_0)$ CRÍTICOS.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Desarrollo de Taylor de $f$ en $P(x_0, y_0)$: $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = Hf(x_0, y_0)(h) + R_2(h, (x_0, y_0))$, $\lim_{h\to 0} \frac{R_2(h,(x_0,y_0))}{\|h\|^2} = 0$

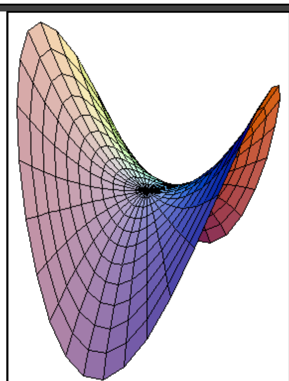
$$Hf(x_0, y_0)(h) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Estudio del signo de $Hf(x_0, y_0)(h)$. Completamos cuadrados en la forma cuadrática.

La Matriz Hessiana en $P(x_0, y_0)$ es simétrica $\Rightarrow$ diagonalizable. $\lambda_1$ y $\lambda_2$ sus valores propios, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $det(H) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$det(H) < 0$
PUNTO SILLA
$\text{sign}(\lambda_1) \neq \text{sign}(\lambda_2)$

Estudio local de la función
En algunas direcciones es un máximo
En algunas direcciones es un mínimo



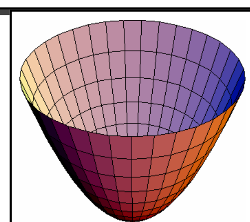
$det(H) = 0$
Punto crítico degenerado
$\lambda_1$ y/ó $\lambda_2 = 0$

Estudio local de la función
Estudio de derivadas sucesivas

$det(H) > 0$
Extremo local
$\text{sign}(\lambda_1) = \text{sign}(\lambda_2)$

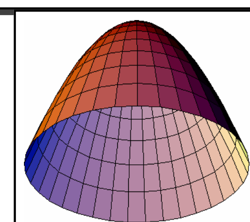
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) > 0$

MÍNIMO LOCAL
$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) > f(x_0, y_0)$



$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) < 0$

MÁXIMO LOCAL
$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) < f(x_0, y_0)$



$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) = 0$

Este caso no posible
$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & d \end{pmatrix} = -b^2 < 0$