Estudio de máximos locales, mínimos locales y puntos silla de una función $f \in C^3(\mathbb{R}^N)$

CONDICIÓN NECESARIA: SER PUNTOS $x_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ CRÍTICOS.

↓

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{N-1}}(x_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) = 0$$

↓

Desarrollo de Taylor de f en x_0: $f(x_0+h) - f(x_0) = Hf(x_0)(h) + R_2(h, x_0)$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R_2(h,x_0)}{\|h\|^2} = 0$

$$Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_{N-1} & h_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{N-1} \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{N-1} \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_0) & \ddots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_3}(x_0) \\ . & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{N-1} \partial x_N}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_N}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N-1} \\ h_N \end{pmatrix}$$

↓

Estudio del signo de $Hf(x_0)(h)$. Completamos cuadrados en la forma cuadrática.

La Matriz Hessiana en x_0 es simétrica $\Rightarrow$ diagonalizable. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}, \lambda_N$ sus valores propios, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$, $det(H) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{N-1} \cdot \lambda_N$

A_k menor principal de orden k.

↓

$Hf(x_0)$: definido positiva
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}, \lambda_N > 0$
Sylvester: $det(A_K) > 0$, $\forall K$
MINIMO LOCAL

$Hf(x_0)$: definido negativa
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}, \lambda_N < 0$
Sylvester:$(-1)^K det(A_K) > 0$, $\forall K$
MAXIMO LOCAL

$Hf(x_0)$: ni definida positiva ni definida negativa
Algunos valores propios positivos, otros negativos
PUNTO SILLA

$Hf(x_0)$: ni definida positiva ni definida negativa
Algún valor propio es cero, luego $det(H) = 0$
ESTUDIO LOCAL DE LA FUNCIÓN