PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS

CÁLCULO II, 2009-10

Algunas preguntas-modelo para el segundo examen parcial

El verdadero examen será más breve que este modelo y diferente de él.

---

1. Definamos la función $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5xy}{2x^2+3y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Razonar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ o no.

(b) Decidir si f es continua o no en $(0,0)$ y explicar por qué.

---

2. [Pregunta de tipo test. Elíjase la respuesta correcta.]

Utilizando la desigualdad $(|x|-|y|)^2 \geq 0$, como en algunos ejercicios vistos en clase, podemos deducir que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$:

(A) no existe, (B) existe pero no es finito, (C) existe y es $=0$,

(D) existe y es $=1$, (E) no se sigue ninguna de las conclusiones anteriores.

---

3. Demostrar, de una manera muy breve pero rigurosa, que el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2y\cos(xy) < x^2-y^2+1\}$ es abierto.

---

4. Definamos la función $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/4}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

(a) [Marcar sólo una respuesta, sin justificación.] El vector gradiente de f en un punto $(x,y) \neq (0,0)$ es el siguiente:

(A) $\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/4}}, \frac{2y}{(x^2+y^2)^{3/4}}\right)$, (B) $\left(\frac{x}{2(x^2+y^2)^{1/4}}, \frac{y}{2(x^2+y^2)^{1/4}}\right)$,

(C) $\left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^{1/4}}, \frac{2y}{(x^2+y^2)^{1/4}}\right)$, (D) $\left(\frac{x}{2(x^2+y^2)^{3/4}}, \frac{y}{2(x^2+y^2)^{3/4}}\right)$,

(E) $\left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^{1/4}}, \frac{2x}{(x^2+y^2)^{1/4}}\right)$.

(b) Decidir si existe o no la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, justificando la respuesta.

(c) Decidir razonadamente si f es diferenciable o no en el punto $(0,0)$, indicando el resultado utilizado.

(d) ¿En qué dirección se registra el crecimiento máximo de la función f en el punto $(0,1)$? Para determinar dicha dirección, elegir un vector $\vec{v}$ de norma 1. Justificar la respuesta.

---

5. Una partícula se mueve según la ley $\gamma(t) = (t, t^2, -t)$, $-1 \leq t \leq 2$. Comprobar que se trata de una trayectoria diferenciable y hallar el valor del parámetro t para el que la velocidad en el punto $\gamma(t)$ sea mínima.
