Ejercicios de repaso

Estos ejercicios pueden ayudar a preparar mejor el examen y se recomienda su estudio después de estudiar las soluciones de los problemas de las ocho hojas repartidas durante el curso. Estos ejercicios adicionales NO se resolverán en clases de prácticas aunque los profesores de teoría o de prácticas podrán sugerir algunas pistas para su resolución a los alumnos interesados. Los problemas en los exámenes finales no serán necesariamente similares a los aquí propuestos y podrán corresponder a otros temas no cubiertos en esta colección.

1.- Calcular el ángulo formado por el vector $(1,0,1)$ y la dirección de máxima variación de la función

$$f(x,y,z) = x^3y + z^3y^2$$

en el punto $(0,1,1)$.

2.- Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Demuéstrese que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existen en $(1,0)$.

3.- Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3+4y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) Decidir razonadamente si es diferenciable en $(0,0)$.

(b) Determinar si la función $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$.

4.- (a) Explicar por qué el conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 4x^2 + y^2 \leq 25\}$ es compacto.

(b) Hallar razonadamente los extremos de la función $f(x,y) = x^4 + x^2 + 2y^2$ en K.

5.- Explicar por qué $K = \{(x,y) : \, x^2 + y^2 \leq 9\}$ es compacto y hallar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1+(x-2)^2+y^2}$$

sobre el conjunto K. ¿Por qué se alcanzan?

6.- (a) Dibujar la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$.

(b) Expresar la integral $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

7.- Calcular la integral $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde

$$D = \{(x,y) : \, x < x^2 + y^2 < 2x\}\,.$$

8.- Hallar el valor de la integral

$$\iint_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy\,,$$

donde Ω es el triángulo determinado por la recta $x + y = 2$ y los dos ejes coordenados. Utilícese un cambio lineal de variables.

9.- Calcular la integral triple $\displaystyle\iiint_S (x^2+y^2+3z^2)\,dx\,dy\,dz$, donde

$$S = \{(x,y,z) : \, x^2+y^2 \leq 4\,, -1 \leq z \leq 4\}\,.$$

10.- Dado el sólido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq z - 1\,, \; 0 \leq z \leq 4\}$, calcular su volumen $V(S)$.

11.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular la integral $\displaystyle\iiint_\Omega x\, y\, z\, dx\, dy\, dz$ con

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \; x, y, z \geq 0\right\}.$$

Dibujar el recinto de integración.

12.- (a) ¿Qué representa geométricamente el sólido

$$S = \{(x, y, z) : \; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}?$$

(b) Calcular la integral triple

$$\iiint_S \frac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3}\,.$$

13.- Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

14.- Definir y dibujar en coordenadas cartesianas el sólido D que en coordenadas esféricas viene dado por

$$0 \leq r \leq 2a \cos\varphi\,, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}\,, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,.$$

15.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de la siguiente integral, cambiando a coordenadas cilíndricas:

$$\iiint_\Omega [(x + y)^2 - z]\, dx\, dy\, dz\,,$$

siendo Ω el cono limitado por $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

16.- Dibujar la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = \left(t, \frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}, t\right)$, $1 \leq t \leq 2$, y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\, ds$, donde $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}$.

17.- Comprobar si el campo vectorial $F(x, y) = 2x \cos y\mathbf{i} - x^2 \operatorname{sen} y\mathbf{j}$ es conservativo y, si procede, hallar una función potencial para F.

18.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x, y)\, ds$ del campo vectorial $F(x, y) = (2 - y, x)$ a lo largo del camino descrito por la cicloide $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dibujar el camino de integración.

19.- Calcular el área del interior de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ usando la fórmula de Green.

20.- Sea γ el borde de la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\,, y \geq x\,, y \geq -x\}\,,$$

orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma x^3\, dy - y^3\, dx$.

21.- (a) Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

(b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0{,}5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0{,}5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (c).