Hoja 8

Integrales de línea. Campos vectoriales.
Fórmula de Green. Integrales sobre una superficie

1.- Dibujar el arco de cicloide descrito por $x = R\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R\,(1 - \cos t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ y hallar su longitud.

2.- Hallar la longitud del arco de hipocicloide descrito por $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

3.- Dada la curva γ mediante las ecuaciones paramétricas $x = t\,\cos t$, $y = t\,\operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

(a) hallar el vector tangente unitario a la curva en el punto $(0, \pi/2, \pi/2)$;

(b) calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma z\,ds$;

(c) determinar la longitud de γ.

4.- Dibujar la curva descrita por la trayectoria σ dada por $\sigma(t) = (\operatorname{sen}\, t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$, y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\,ds$, donde $f(x, y, z) = x + y + z$.

5.- Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F(x, y)\,ds$ del campo vectorial F a lo largo de la curva orientada Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(a) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1 - x|$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$.

(b) $F(x, y) = (x + y, x - y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

6.- Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x, y)$ el vector unitario que apunta desde (x, y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a, 0)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

7.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, donde Γ es el contorno del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, orientado positivamente.

8.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma y\,dx + x^2\,dy$, cuando Γ es:

(a) la circunferencia $x^2 + y^2 = a\,x$;

(b) la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

9.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ en el sentido de las agujas del reloj.

10.- Calcular el flujo de los campos $F(x, y) = (y, -x)$ y $G(x, y) = (x, y)$ hacia el exterior del disco unidad $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

11.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4 - x^3e^x - y)\,dx + (x - y\arctan y)\,dy$, donde Γ viene dado como sigue: dados los puntos $A = (2, 0)$, $B = (1, -1)$ y $C = (0, -1)$ de $\mathbb{R}^2$, Γ es el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1, y los segmentos orientados BC, CO, OA (O es el origen de coordenadas).

12.- Comprobar si el campo vectorial $F(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$ es conservativo y, si procede, hallar una función potencial para F.

13.- Sean $r > 0$, $D = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq r^2\}$ y ∂D su frontera orientada en positivamente. Usando primero el teorema de Green y luego las coordenadas polares, calcular la integral $\displaystyle\int_{\partial D} xy^2\, dy - yx^2\, dx$.

14.- Evaluar $\displaystyle\int_\Gamma (2\,x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy$, donde Γ es el círculo unidad orientado en el sentido negativo.

15.- Verificar el teorema de Green para el campo (P, Q) con $P(x, y) = 2\,x^3 - y^3$ y $Q(x, y) = x^3 + y^3$ y la región anular (corona) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,a^2$.

16.- Sea A el área del recinto acotado por una curva γ de clase C^1, simple y cerrada en el plano y orientada en el sentido positivo. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma x\, dy - 4y\, dx$ en función de A.

17.- Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (4\,u, 3\,u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0, 1, 6)$.

(b) $\Phi(u, \theta) = (\cosh u\, \cos\theta, \cosh u\, \operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} u)$ en $(0, 1, 0)$.

18.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u, v) = (\cos u\, \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u\, \operatorname{sen} v, \cos v)$ con $0 \leq u \leq 2\,\pi$, $0 \leq v \leq \pi$.

(b) $\Phi(\theta, \varphi) = (4\,\cos\theta\, \operatorname{sen}\varphi, 2\, \operatorname{sen}\theta\, \operatorname{sen}\varphi, 3\,\cos\varphi)$ con $0 \leq \theta \leq 2\,\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

19.- Dada la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerándola como:

(a) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta, \varphi) = (2\,\cos\theta\, \operatorname{sen}\varphi, 2\, \operatorname{sen}\theta\, \operatorname{sen}\varphi, 2\,\cos\varphi)$ con $0 \leq \theta \leq 2\,\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

(b) Superficie de nivel 4 de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Gráfica de la función $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

20.- Hallar el área del helicoide definido por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ donde $\Phi(r, \alpha) = (r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha, \alpha)$ y D es la región donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

21.- Un toro (o donut) T se puede representar paramétricamente por la función $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, donde Φ viene dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos\phi)\cos\theta$, $y = (R + \cos\phi)\operatorname{sen}\theta$, $z = \operatorname{sen}\phi$, donde $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, esto es $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Calcular el área de T.

22.- Demostrar que la superficie $z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $1 \leq z < \infty$ se puede llenar pero no se puede pintar.

23.- Calcular la integral de superficie $I = \displaystyle\iint_S (x + z)\, dS$, donde S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$, perteneciente al primer octante, de dos maneras:

(a) considerando S como la gráfica de una función de las variables x e y y expresando I como una integral doble;

(b) parametrizando la superficie de otra manera (por ejemplo, usando como parámetros la coordenada x y el ángulo θ de las coordenadas polares en el plano yz.

24.- Las condiciones $z = 12$ y $x^2 + y^2 \leq 5$ describen un disco, S, contenido en un plano horizontal. Para el campo vectorial $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcúlese $\displaystyle\iint_S F \cdot dS$ de, por lo menos, dos maneras distintas.