

Hoja 7

Cambio de variables. Principio de Cavalieri

1.- Dibujar la región Ω y expresar la integral $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

(a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, donde $a > 0$.

(b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

2.- Consideremos la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = v - u^2. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u, v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.

(c) Calcular $\iint_{\Omega} \frac{1}{(x - y + 1)^2} dx dy$.

3.- Utilizar una transformación lineal para calcular la integral

$$\int_{\Omega} (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy,$$

donde Ω es el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$.

4.- Se considera la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u, v)$.

(b) Determinar la imagen Ω mediante esta transformación del rectángulo R cuyos vértices son $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$ y $(1, 3)$.

(c) Calcular el área de Ω .

5.- Demuéstrese la igualdad

$$\iint_{\Omega} f(xy) dx dy = \log 2 \int_1^2 f(u) du,$$

siendo Ω la región del primer cuadrante limitada por las líneas $xy = 1$, $xy = 2$, $\frac{y}{x} = 1$, $\frac{y}{x} = 4$.

6.- Para cada $r > 0$ considérese $I(r) = \int_{-r}^r e^{-t^2} dt$.

(a) Demostrar que

$$I(r)^2 = \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

siendo R el cuadrado $R = [-r, r] \times [-r, r]$.

(b) Sean D_1 y D_2 los discos inscritos en y circunscritos a R , respectivamente. Demostrar que

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < I(r)^2 < \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

(c) Calcular las integrales sobre estos discos mediante el cambio a coordenadas polares. Deducir que $I(r) \rightarrow \sqrt{\pi}$ cuando $r \rightarrow +\infty$. Obsérvese que esto significa

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7.- Calcular la integral

$$I(p, r) = \iint_{D_r} \frac{dx dy}{(p^2 + x^2 + y^2)^p}$$

sobre el disco $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Determinar los valores de p para los que $I(p, r)$ tiene límite cuando $r \rightarrow +\infty$.

8.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

(a) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$.

(b) $\iiint_{\Omega} dx dy dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 1$.

9.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

(a) $\iiint_B \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 9)^2} dx dy dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2a$.

10.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es el recinto acotado con frontera $\partial\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = z\}$.

11.- Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos.

(a) El limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e inferiormente por el paraboloides $x^2 + y^2 = 4z$.

(b) El cuerpo acotado $K \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera viene dada por $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1$.

13.- Demostrar que el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ es $A = \pi ab$. Utilizar este resultado y el principio de Cavalieri para demostrar que el volumen limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ es $V = \frac{4}{3} \pi abc$.

14.- Sea T el toro sólido en \mathbb{R}^3 obtenido al girar el círculo $(y - a)^2 + z^2 = b^2$ del plano $x = 0$ alrededor del eje Z . Utilizar el principio de Cavalieri para calcular que el volumen de T es $2\pi^2 ab^2$.