Hoja 6

Integración dobles y triples. Teorema de Fubini

1.- Sea f la función definida para $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f no es integrable en el rectángulo $R = [0,1] \times [0,1]$.

(b) Estudiar la existencia de las integrales iteradas

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx \Big) dy \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy \Big) dx\,.$$

2.- Sea f definida en $Q = [0,1] \times [0,1]$ mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = y, \\ 0 & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Demuéstrese que la integral de f sobre Q existe y que su valor es 0. Comprobar que f es discontinua en todos los puntos de la diagonal $\{(x,x) :\ 0 \leq x \leq 1\}$ de Q y continua en todos los demás puntos del cuadrado.

3.- Demostrar la existencia de la integral $\displaystyle\iint_Q f(x+y)\,dx\,dy$, donde $Q = [0,2] \times [0,2]$ y $f(t) = [t]$ representa el mayor número entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

4.- Definimos $f(x,y)$ en el cuadrado $Q = [0,1] \times [0,1]$ como sigue:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Probar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$ existe y es igual a 1.

(b) Demostrar que, no obstante, f no es integrable en Q.

5.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar, en cada caso, la existencia de la integral.

(a) $\displaystyle\iint_Q x^2\,e^y\,dx\,dy,\ Q = [-1,1] \times [0,\log 2]$; ($b$) $\displaystyle\iint_Q |\cos(x+y)|\,dx\,dy,\ Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$;

(c) $\displaystyle\iint_Q |xy|\,dx\,dy,\ Q = [-1,2] \times [1,3]$; ($d$) $\displaystyle\iint_Q \operatorname{sen}^2(3x-2y)\,dx\,dy,\ Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

6.- Para cada una de las siguientes funciones f definidas en el rectángulo $Q = [0,1] \times [0,1]$, se pide representar el conjunto de los valores $f(x,y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así obtenido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in Q :\ f \text{ no es continua en } (x,y)\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 1-(x+y) & \text{si} \quad x+y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$

7.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor en cada uno de los casos siguientes.

(*a*) $\displaystyle\iint_\Omega x\,\cos(x+y)\,dx\,dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π).

(*b*) $\displaystyle\iint_\Omega x^2\,y^2\,dx\,dy$, siendo Ω la región acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas $xy=1$ y $xy=2$ y las rectas $y=x$ e $y=4x$.

8.- Calcular $\displaystyle\iint_D y dx\,dy$, donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\geq 0,\ 2x/\pi\leq y\leq \operatorname{sen} x\}$.

9.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z=6$. Dibujar esta pirámide y luego calcular su volumen: a) de manera elemental; b) integrando.

10.- Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z=x^2+y^2$ y el plano $z=10$.

11.- En los siguientes apartados, se supone que la integral de una función positiva f sobre la región Ω se reduce a la integral iterada que se da. En cada caso, se pide determinar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración.

(*a*) $\displaystyle\int_0^2\Big(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx\Big)dy.$ (*b*) $\displaystyle\int_1^4\Big(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\Big)dx\,,$

(*c*) $\displaystyle\int_1^e\Big(\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy\Big)dx.$ (*d*) $\displaystyle\int_0^\pi\Big(\int_{-\operatorname{sen} x/2}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy\Big)dx.$

12.- Invirtiendo el orden de integración si fuese necesario, calcúlese la integral

$$\int_0^4\int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dxdy\,.$$

13.- Observando que $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)dxdy=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$, demostrar que

$$2\int_a^b\int_x^b f(x)f(y)dxdy=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 .$$

14.- Si $D=[-1,1]\times[-1,2]$, probar que

$$1\leq \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}\leq 6\,.$$

15.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(*a*) $\displaystyle\iiint_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $Q=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

(*b*) $\displaystyle\iiint_T x^2\,\cos z\,dx\,dy\,dz$, siendo T la región limitada por los planos $z=0, z=\pi, y=0, y=1, x=0, x+y=1$.

(*c*) $\displaystyle\iiint_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z=x\,y$ y los planos $y=x, x=1$ y $z=0$.

16.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ de la función positiva f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z=0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(*a*) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^x\Big(\int_0^y f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$ (*b*) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(*c*) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$ (*d*) $\displaystyle\int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)dx.$