

## Hoja 4

**Funciones vectoriales. Regla de la cadena. Plano tangente a una superficie**

1.- Sea  $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$  con  $u = \frac{x-y}{2}$ ,  $v = \frac{x+y}{2}$ . Aplicar la regla de la cadena para calcular  $\nabla F(x, y)$  en función de las derivadas parciales de  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u}$  y  $\frac{\partial f}{\partial v}$ .

2.- Sean  $f(x, y) = x^2 + y$ ,  $g(u) = (\sin 3u, \cos 8u)$  y  $h(u) = f(g(u))$ . Calcular  $dh/du$  en  $u = 0$  tanto de forma directa como usando la regla de la cadena.

3.- El desplazamiento en el instante  $t$  de la posición horizontal sobre una recta  $x$  de una cuerda de violín es  $u = \sin(x - 6t) + \sin(x + 6t)$ . Calcular la velocidad de la cuerda en  $x = 1$  cuando  $t = 1/3$ .

4.- Las relaciones  $u = f(x, y)$ ,  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  definen  $u$  como función escalar de  $t$ , digamos  $u = u(t)$ . Aplicar la regla de la cadena para la derivada de  $u$  respecto de  $t$  cuando

$$f(x, y) = e^{xy} \cos xy^2, \quad x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

5.- La sustitución  $t = g(x, y)$  convierte  $F(t)$  en  $f(x, y) = F(g(x, y))$ . Calcúlese la matriz de  $Df(x, y)$  en el caso particular en que  $F(t) = e^{\sin t}$  y  $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ .

6.- Las ecuaciones  $u = f(x, y)$ ,  $x = x(s, t)$  e  $y = y(s, t)$  definen  $u$  como función de las variables  $(s, t)$ . Expresar las derivadas parciales  $\frac{\partial u}{\partial s}$  y  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , en términos de las diversas derivadas parciales de  $f$ ,  $x$  e  $y$ . Resolver este mismo ejercicio en el caso particular en que  $x(s, t) = st$ ,  $y(s, t) = \frac{s}{t}$ .

7.- Sean  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(2x+y)), \quad g(u, v, w) = (u+2v^2+3v^3, 2v-u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de  $Df(x, y)$  y  $Dg(u, v, w)$ . Calcular la función compuesta  $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$  y la matriz de  $Dh(1, -1, 1)$ .

8.- Sean  $f$  una función diferenciable en cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y  $g = (g_1, g_2)$  la función vectorial

$$g(u, v, w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta  $h = f \circ g$  y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 g_1 + 4 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} g_2 + 3 \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2.$$

9.- (a) Hallar la función derivada  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , siendo  $f(x, y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt$ , definida para  $x > 0, y > 0$ .

(b) Hallar el valor de  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ , donde

$$f(x, y) = \int_0^{x^2y-5x} e^{-t^2} dt, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

10.- Para  $y = f(x)$  definida mediante la ecuación  $x^2 + y^3 + e^y = 0$ , hállese  $f'(x)$  en términos de  $x$  e  $y$ .

11.- Supongamos que la ecuación  $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$  define  $z$  como función de  $x$  e  $y$ , sea ésta  $z = f(x, y)$ . Hallar el valor de la constante  $k$  para el cual  $f(0, e) = 2$  y calcular  $\nabla f(0, e)$ .

12.- Hállese la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de la funciones:

(a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , en el punto  $(1, 1, 0)$ .

(b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en un punto genérico  $(x_0, y_0, z_0)$ . ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano  $x = z$ ?

13.- Hállese la ecuación del plano tangente a la superficie  $x^2 - y^2 - z = 0$  en el punto  $(1, 1, 0)$ .

14.- Consideremos el lugar geométrico de los puntos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  para los cuales  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Hallar la ecuación del plano tangente en el punto  $(1, 1, \sqrt{2})$ . ¿Existe un plano tangente en el origen? ¿Por qué?

15.- Si  $(a, b, c)$  es un punto de la superficie  $z = xy$ , las dos rectas

$$\begin{cases} z = bx, \\ y = b, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} z = ay, \\ x = a, \end{cases}$$

se cortan en  $(a, b, c)$  y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto  $(a, b, c)$  contiene a esas dos rectas.

16.- Hallar la ecuación de la recta tangente a las dos superficies  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$  y  $z = e^{x-y}$  en el punto  $(1, 1, 1)$ .

17.- Hallar una constante  $c$  tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas  $(x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$  y  $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ , los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.

18.- Calcular las derivadas direccionales de las funciones:

(a)  $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$  en el punto  $(2, 2, 1)$  en la dirección de la normal exterior a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .

(b)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2$  en un punto cualquiera de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , en la dirección de la normal exterior en dicho punto.