Cálculo II 1º de Grado en Matemáticas

10 DE MAYO DE 2010 EXAMEN FINAL

APELLIDOS Y NOMBRE ____________________

D. N. I. ____________________

FIRMA ____________________

Este examen es de desarrollo. Se pide justificar todas las respuestas, nombrar los teoremas utilizados y entregar esta hoja firmada al final.

Duración: 2 horas y media. Todos los problemas puntúan igual.

1. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

   a) Decidir si existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ y hallar sus valores, si procede.

   b) Razonar si f es diferenciable en $(0,0)$ o no.

2. Sea $f(x,y) = xy - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, para $x,\ y \neq 0$.

   a) Calcúlese su derivada direccional en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

   b) Hállense los puntos críticos y los extremos de la función f, indicando su carácter.

3. Halle el volumen de la región comprendida entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 3 - 2x^2 - 2y^2$ y dibuje la región y su proyección al plano XZ.

4. *a*) Calcúlese

$$\int_C (x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy\,,$$

   donde C es la frontera orientada positivamente de la región comprendida entre la parte superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje X.

   b) Hállense todos los valores posibles del parámetro real a para que el campo vectorial

$$F = (x^3 - y^3, axy^2)$$

   sea conservativo. Para los valores hallados, determínese la función potencial f para la que $f(0,0) = 1$.

Sección especial adicional. Se corregirá sólo en caso de que la nota obtenida en los ejercicios anteriores sea estrictamente superior a 9. Esta sección decidirá las posibles Matrículas de Honor.

A. Responder CIERTO o FALSO razonando la respuesta.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in \Omega$. Entonces $f(x,y) = cte$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

B. Responder CIERTO o FALSO razonando la respuesta.

Si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene las derivadas parciales en el origen y cumple $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ y otra función $\sigma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 satisface $\sigma(0) = \sigma'(0) = (0,0)$, entonces $(f \circ \sigma)'(0) = 0$.

C. Responder CIERTO o FALSO razonando la respuesta.

Existe una superficie S descrita por una función $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, tal que para un conjunto infinito $A \subset \Omega$ se verifica $T_u \times T_v(u,v) = (0,0,0)$, $(u,v) \in A$ y existe el plano tangente en todos los puntos $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in A$.

D. Decídase razonadamente el número exacto de puntos críticos de la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = xe^y + ye^x .$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura Cálculo II (1º de Mat.) Grupo GRADO

Apellidos D. VUKOTIĆ (COORDINADOR) ~~Nombre~~

Ejercicio del día 10/05/2010 (EXAMEN FINAL)

1. □ (a) Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{h^2}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

La función f es simétrica en x e y: $f(y,x)=f(x,y)$, lo cual implica que, de manera análoga, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

(b) Cuando $t\to 0$, $(t,t)\to(0,0)$ y $f(t,t)=\frac{(2t)^2}{2t^2}=2\to 2$; también cuando $t\to 0$, $(t,0)\to(0,0)$ pero $f(t,0)=\frac{t^2}{t^2}=1\to 1\neq 2$

$\Rightarrow$ no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $\Rightarrow$ f no es continua en $(0,0)$

$\Rightarrow$ f no es diferenciable en $(0,0)$. ☒

---

2. □ (a) Para $x,y\neq 0$, $\nabla f(x,y)=\left(y+\frac{1}{x^2},\ x+\frac{1}{y^2}\right)$; (Normalizamos porque $\|\vec{i}-\vec{j}\|=\sqrt{2}$)

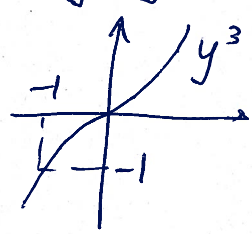
$$\Rightarrow D_{\vec{i}-\vec{j}}(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot\frac{(\vec{i}-\vec{j})}{\sqrt{2}}=(2,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=0.$$

(b) Puntos críticos: $\nabla f(x,y)=(0,0)\iff y+\frac{1}{x^2}=0=x+\frac{1}{y^2}$.

$x+\frac{1}{y^2}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{y^2}\Rightarrow\frac{1}{x^2}=y^4$ $(x,y\neq 0)$ $\Rightarrow y+y^4=0$

$\Rightarrow y(y^3+1)=0$; $y\neq 0\Rightarrow y^3=-1$

$\Rightarrow y=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{y^2}=-1$.



$(-1,-1)$ es el único punto crítico de f.

- La matriz Hessiana de f en (x,y) es:

$$\begin{bmatrix}-\frac{2}{x^3} & 1\\ 1 & -\frac{2}{y^3}\end{bmatrix}.$$

En el punto crítico $(-1,-1)$, la matriz Hessiana es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ y sus menores principales son

$\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3 > 0$. Por el criterio de Sylvester, la matriz y la forma bilineal Hessiana son definidas positivas. Por tanto, f tiene en $(-1,-1)$ un mínimo local:

$$f_{mín} = f(-1,-1) = 3.$$

Este mínimo local no es global ya que, por ejemplo,

$$f(1,1) = -1 < 3. \quad \boxtimes$$

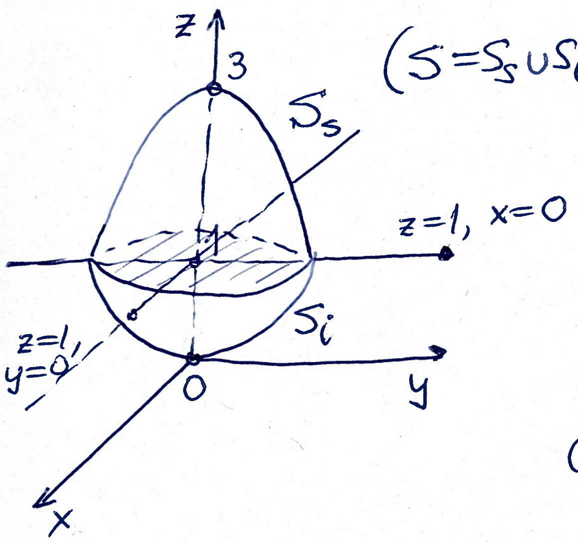
(3.) ☐ Este ejercicio admite, al menos, 3 soluciones distintas, todas ellas relativamente sencillas:

1) utilizando la fórmula para el volumen de un sólido de revolución;

2) utilizando el principio de Cavalieri en su forma general;

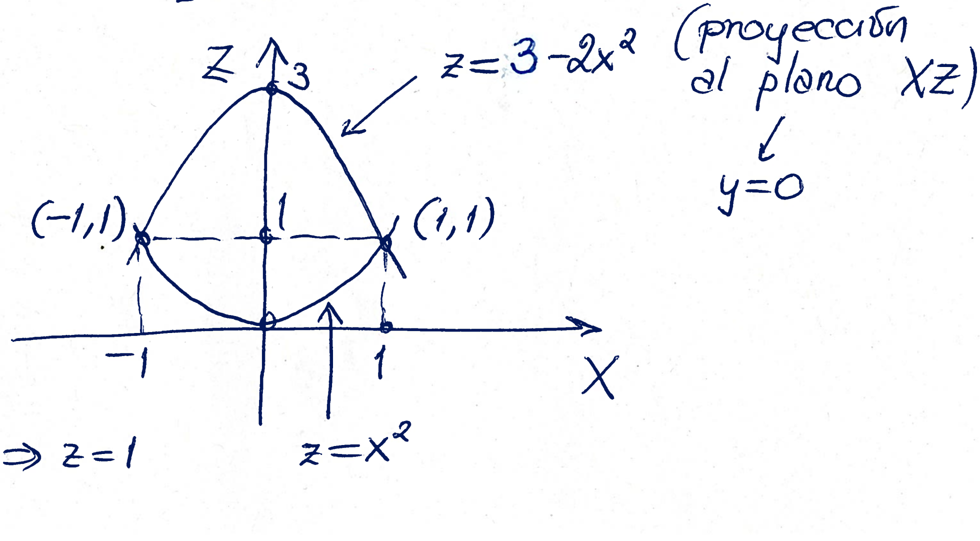
3) usando las coordenadas cilíndricas.

- El sólido es similar a un "huevo Kinder":



$(S = S_s \cup S_i)$

se obtiene girando alrededor del eje Z una parte de la curva $z=x^2$ y una parte de la curva $z = 3-2x^2$:



Intersección:

$z = x^2 = 3-2x^2 \Rightarrow 3 = 3x^2$

$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow z = 1$

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura Cálculo II (GRADO) Grupo

Apellidos COORDINADOR Nombre

Ejercicio del día 10/05/2005

3. (CONT.)

(1) Volumen de S como sólido de revolución:

$$S = S_s \cup S_i \Rightarrow V(S) = V(S_s) + V(S_i).$$

S_i: se obtiene girando $x = f(z) = \sqrt{z}$ alrededor del eje Z, desde $z=0$ hasta $z=1 \Rightarrow V(S_i) = \pi \int_0^1 f(z)^2 dz = \pi \int_0^1 z\,dz = \frac{\pi}{2}$.

S_s: $z = 3 - 2x^2,\ x > 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 3 - z,\ x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3-z}{2}}$.

Se obtiene girando $x = f(z) = \sqrt{\frac{3-z}{2}}$ en torno al eje Z, desde $z=1$ hasta $z=3 \Rightarrow$

$$V(S_s) = \pi \int_1^3 f(z)^2 dz = \pi \int_1^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{z}{2}\right) dz = \pi \left(\frac{3}{2} z - \frac{z^2}{4}\right)\Big|_1^3$$

$$= \pi\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) = \pi.$$

En total, $V(S) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$. [(2) sería similar.]

(3) $V(S)$, usando las coordenadas cilíndricas.

S_i: $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r^2 \le z \le 1$ (ya que $x^2 + y^2 = r^2$)

$$\Rightarrow V(S_i) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2}^1 dz \right) r\,dr \right) d\theta = 2\pi \cdot \int_0^1 r(1 - r^2)\,dr$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 (r - r^3)\,dr = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

S_s: $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 1 \le z \le 3 - 2r^2$

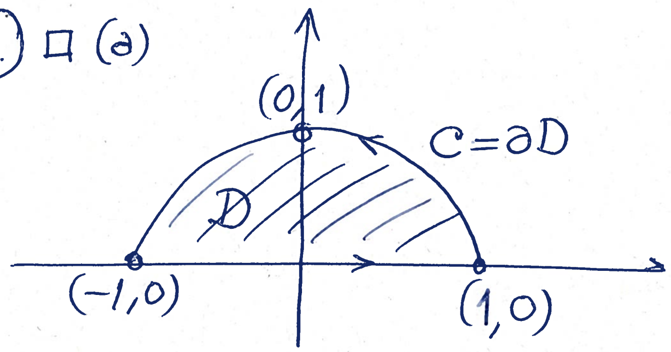
$$\Rightarrow V(S_s) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{3-2r^2} dz\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \int_0^1 r(2 - 2r^2)\,dr$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{r^2}{1} - \frac{r^4}{2}\right)\Big|_0^1 = \pi.$$

$$V(S) = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}. \quad \boxtimes$$

2^a

(4.) □ (a)



$D=\{(x,y): 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$

$C=\partial D$.

El dominio D queda a la izquierda al trazar la curva C con la orientación dada $\Rightarrow$ orientación positiva.

$$P(x,y)=x^3-y^3;\ Q(x,y)=x^3+y^3.$$

Son funciones polinómicas (elementales) y, por tanto, son de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ (de hecho, es fácil calcular todas sus derivadas parciales de 1er orden y ver que son continuas).

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2;\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-3y^2.$$

D es una región elemental ya que está acotada por dos curvas simples C^1 $\Rightarrow$ podemos aplicar la fórmula de Green:

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=3\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy.$$

(En cc. polares, D viene dado por: $0\leq r\leq 1$, $0<\theta<\pi$)

$$=3\int_0^1\int_0^{\pi} r^2 r\,dr\,d\theta=3\pi\int_0^1 r^3dr=\frac{3\pi}{4}.$$

(b) F es un campo conservativo en el plano $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\Leftrightarrow\ ay^2=-3y^2 \Leftrightarrow a=-3.$

Para $a=-3$, $F=(x^3-y^3,-3xy^2)$ y entonces

$F=\nabla f \Leftrightarrow\quad x^3-y^3=\frac{\partial f}{\partial x},\ -3xy^2=\frac{\partial f}{\partial y}.$

Integrando la primera igualdad respecto a x, deducimos que

$f(x,y)=\frac{x^4}{4}-y^3x+\phi(y)$, ϕ diferenciable. La segunda igualdad implica que $\frac{\partial f}{\partial y}=-3xy^2=-3xy^2+\phi'(y)\Rightarrow \phi'(y)\equiv 0\Rightarrow \phi\equiv cte=C$

$\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^4}{4}-xy^3+C$; $f(0,0)=1\Rightarrow 1=C\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^4}{4}-xy^3+1.$

⊠