Cálculo II (PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS), 2009-10

Examen parcial 2, día 09/03/2010

Modelo 1

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1–2	P. 3	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ________________________________

D.N.I. O PASAPORTE: ______________________________

FIRMA: ____

---

*Las preguntas **1** y **2** son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta a cada problema y apuntar la letra adecuada en la casilla correspondiente.*
Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos, incorrecta o doble: -0,1 puntos, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq 1 = f(0,0).$$

(A) no tiene límite, ni finito ni infinito, en el origen;
(B) sí tiene límite infinito en el origen;
(C) tiene límite finito en el origen pero no es continua ahí;
(D) sí es continua en el origen;
(E) ninguna de las afirmaciones (A)–(D) es cierta.

$\boxed{C}$

---

2. El vector tangente a la trayectoria

$$\gamma(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t), 2t)$$

tiene longitud:

(A) $2\sqrt{2}$; (B) 2; (C) $\sqrt{2}$; (D) 4; (E) otra.

$$\gamma'(t) = (-2\operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t, 2)$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$\boxed{A}$

El último ejercicio es de desarrollo. Se pide presentar una solución razonada indicando los detalles, explicando el método y nombrando o enunciando los teoremas utilizados.

---

3. [1,5 = 0,5 + 1 puntos]
(a) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

calcular el vector $\nabla f(0,0)$.

(b) Decidir razonadamente si f es diferenciable en el origen o no.

Cálculo II (PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS), 2009-10

Examen parcial 2, día 09/03/2010

Modelo 2

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1–2	P. 3	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ______________________ APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: _________________________________

FIRMA: ____

---

*Las preguntas **1** y **2** son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta a cada problema y apuntar la letra adecuada en la casilla correspondiente.*
Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos, incorrecta o doble: -0,1 puntos, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(A) no tiene límite, ni finito ni infinito, en el origen ;
(B) sí tiene límite infinito en el origen ;
(C) tiene límite finito en el origen pero no es continua ahí ;
(D) sí es continua en el origen ;
(E) ninguna de las afirmaciones (A)–(D) es cierta .

$f(x,0) = 0 \to 0$, $x \to 0$, p.ej. $f(\frac{1}{n}, 0) = 0$
$f(x,\cancel{x}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$, $x \to 0$, p.ej. $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.
$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\boxed{A}$

---

2. El vector tangente a la trayectoria

$$\gamma(t) = (\cos t + \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t - \cos t, \sqrt{2}t)$$

tiene longitud:

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) $\sqrt{2}$; (D) 4 ; (E) otra.

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t + \cos t, \cos t + \operatorname{sen} t, \sqrt{2}$
$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{2\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t + 2}$
$= \sqrt{4} = 2$.

$\boxed{B}$

El último ejercicio es de desarrollo. Se pide presentar una solución razonada indicando los detalles, explicando el método y nombrando o enunciando los teoremas utilizados.

---

3. [1,5 = 0,5 + 1 puntos]

(a) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

calcular el vector $\nabla f(0,0)$.

(b) Decidir razonadamente si f es diferenciable en el origen o no.

Cálculo II (PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS), 2009-10

Examen parcial 2, día 09/03/2010

Modelo 3

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1–2	P. 3	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____________________ APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ______________________________

FIRMA: ____

---

*Las preguntas **1** y **2** son de tipo test. Se pide elegir una única respuesta a cada problema y apuntar la letra adecuada en la casilla correspondiente.*
Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos, incorrecta o doble: -0,1 puntos, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \leq |y|$$

$$\Rightarrow f(x,y) \to 0, \quad (x,y) \to (0,0)$$

$$f(0,0) = 0.$$

(A) no tiene límite, ni finito ni infinito, en el origen;
(B) sí tiene límite infinito en el origen;
(C) tiene límite finito en el origen pero no es continua ahí;
(D) sí es continua en el origen;
(E) ninguna de las afirmaciones (A)–(D) es cierta.

$\boxed{D}$

---

2. La dirección de máximo crecimiento de la función

$$f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2$$

en el punto $(1,1)$ es la dirección del vector:

(A) $\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$; (B) $\mathbf{j}$; (C) $\mathbf{i}$; (D) $\dfrac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$; (E) otra.

$$\nabla f(x,y) = (3x^2-2y, -2x+2y)$$

$$\nabla f(1,1) = (1,0) = \vec{i}$$

$\boxed{C}$

El último ejercicio es de desarrollo. Se pide presentar una solución razonada indicando los detalles, explicando el método y nombrando o enunciando los teoremas utilizados.

---

3. [1,5 = 0,5 + 1 puntos]
(a) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

calcular el vector $\nabla f(0,0)$. $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$. Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{-k^3}{k^2}-0}{k} = \lim_{k\to 0} (-1) = -1.$$

(Las fórmulas cómo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{3x^2(x^2+y^2)-(x^3-y^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$ etc. no sirven porque no tienen sentido en $(x,y)=(0,0)$.)

$$\nabla f(0,0) = (1,-1).$$

(b) Decidir razonadamente si f es diferenciable en el origen o no.

Hemos de decidir si f cumple o no la condición de diferenciabilidad:

$$(D) \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0, \text{ es decir:}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2} - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0, \text{ ya que } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1.$$

Pero

$$\frac{\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2} - h + k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^3-k^3-h(h^2+k^2)+k(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{-hk^2+kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

$= hk \cdot \dfrac{h-k}{(h^2+k^2)^{3/2}}$ no tiende a cero cuando $(h,k)\to(0,0)$; por ejemplo, cuando $h=-k\to 0$, vemos que

$$hk \cdot \frac{h-k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \frac{-2h^3}{(2h^2)^{3/2}} = \frac{-2h^3}{2^{3/2}|h|^3} \not\to 0.$$

Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.