Cálculo II (PRIMER CURSO DE GRADO EN MATEMÁTICAS), 2009-10

Examen parcial 1

Modelo 1

Preguntas de tipo test.
Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos, incorrecta o doble: -0,1 punto, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. La curva de nivel h de la función $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 5$, para $h = 5$, es del siguiente tipo:
(A) una circunferencia ; (B) una elipse ; (C) una parábola ;
(D) una hipérbola ; (E) un punto .

E

---

2. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, los vectores $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - \lambda\mathbf{k}$ en $\mathbb{R}^3$ son ortogonales si y sólo si
(A) $\lambda = 1$; (B) $\lambda = 2$; (C) $\lambda \in \{1, 2\}$;
(D) $\lambda = \pm 1$; (E) para ningún valor de λ.

C

---

3. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x\}$ es:
(A) abierto ; (B) abierto y cerrado a la vez ; (C) cerrado pero no acotado ;
(D) compacto ; (E) no tiene ninguna de las propiedades anteriores .

C

Ejercicio de desarrollo.

---

4. [1=0,3+0,3+0,4 puntos]
(a) Determinar razonadamente el dominio de definición, D, de la función

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2 + 1}\,.$$

Solución. $x^2 + y^2 + 1 \ge 1 > 0$, así que el denominador no se anula. Para que $f(x,y)$ esté definido, es necesario y suficiente que $9 - x^2 - y^2 \ge 0$. El dominio de f es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9\}$.

(b) Representar gráficamente el conjunto D del apartado anterior, indicando si el punto $(3,0) \in D$ o no.

Solución. $D = \overline{B}((0,0);3)$, el disco cerrado (bola cerrada en el plano) con centro en el origen y radio 3. Por tanto, $(3,0) \in D$.

(c) ¿Es cierto que $(3,0) \in \partial D = \operatorname{Fr} D$ o no? Razónese la respuesta.

Solución. Sí, es cierto. Para cualquier $r > 0$, la bola abierta $B((3,0);r)$ (en este caso, disco abierto) contiene tanto puntos de D (por ejemplo, $(3 - \frac{r}{2}, 0)$) como puntos de D^c (por ejemplo, $(3 + \frac{r}{2}, 0)$).

$\boxed{\textbf{Modelo 2}}$

Preguntas de tipo test.
Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos, incorrecta o doble: -0,1 punto, respuesta en blanco: 0 puntos.

---

1. La curva de nivel h de la función $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 5$, para $h = 8$, es del siguiente tipo:
(A) una circunferencia ; (B) una elipse ; (C) una parábola ;
(D) una hipérbola ; (E) un punto .

B

---

2. El ángulo (en radianes) entre los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es:
(A) 0; (B) $\pi/4$; (C) $\pi/3$;
(D) $2\pi/3$; (E) $\pi/6$.

D

---

3. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y \leq x\}$ es:
(A) abierto ; (B) abierto y cerrado a la vez ; (C) cerrado pero no acotado ;
(D) compacto ; (E) ni abierto ni cerrado .

E

Ejercicio de desarrollo.

---

4. [1=0,3+0,3+0,4 puntos]
(a) Determinar razonadamente el dominio de definición, D, de la función

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x^2 + y^2 + 1} .$$

<u>Solución</u>. $x^2+y^2+1 \geq 1 > 0$, así que el denominador no se anula. Por tanto, para que $f(x,y)$ esté definido, es necesario y suficiente que $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$. Luego el dominio de f es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 9\}$.

(b) Representar gráficamente el conjunto D del apartado anterior, indicando si el punto $(0,-3) \in D$ o no.
<u>Solución</u>. $D = \mathbb{R}^2 \setminus B((0,0);3)$, el complementario del disco abierto con centro en el origen y radio 3. Por tanto, $(0,-3) \in D$.

(c) ¿Es cierto que $(0,-3) \in \partial D = \mathrm{Fr}\, D$ o no? Razónese la respuesta.
<u>Solución</u>. Sí, es cierto. Para cualquier $r > 0$, la bola abierta $B((0,-3);r)$ (en este caso, disco abierto) contiene tanto puntos de D (por ejemplo, $(0,-3-\frac{r}{2})$) como puntos de D^c (por ejemplo, $(0,-3+\frac{r}{2})$).

$\boxed{\textbf{Modelo 3}}$

---

1. La curva de nivel h de la función $f(x,y) = x^2 - 4y^2 + 8$, para $h = 8$, es del siguiente tipo:
(A) $\emptyset$; (B) una elipse ; (C) unión de dos rectas ;
(D) una hipérbola ; (E) un punto .

C

---

2. El ángulo (en radianes) entre los vectores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es:

(A) $\pi/2$; (B) $2\pi/3$; (C) $\pi/6$;
(D) $\pi/3$; (E) $\pi/4$.

B

---

3. El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}$ es:
(A) abierto ; (B) abierto y cerrado a la vez ; (C) cerrado pero no acotado ;
(D) compacto ; (E) no tiene ninguna de las propiedades anteriores .

A

Ejercicio de desarrollo.

---

4. [1=0,3+0,3+0,4 puntos]
(a) Determinar razonadamente el dominio de definición, D, de la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} .$$

Solución. El numerador es un polinomio, luego está definido en todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto, para que $f(x,y)$ esté definido, es necesario y suficiente que $9 - x^2 - y^2 > 0$. Se sigue que el dominio de f es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$.

(b) Representar gráficamente el conjunto D del apartado anterior, indicando si el punto $(0,3) \in D$ o no.

Solución. $D = B((0,0);3)$, el disco abierto (bola abierta en el plano) con centro en el origen y radio 3. Por tanto, $(0,3) \notin D$.

(c) ¿Es cierto que $(0,3) \in \partial D = \operatorname{Fr} D$ o no? Razónese la respuesta.

Solución. Sí, es cierto. Para cualquier $r > 0$, la bola abierta $B((0,3);r)$ (en este caso, disco abierto) contiene tanto puntos de D (por ejemplo, $(0, 3 - \frac{r}{2})$) como puntos de D^c (por ejemplo, $(0, 3 + \frac{r}{2})$).