Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2013-14

Soluciones del segundo examen parcial, diciembre de 2013
(grupos de mañana)

---

1. Determine razonadamente si la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{si } x > 0, \\ x+2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

es:

(a) *continua* en el punto $x = 0$;

(b) *derivable* en el punto $x = 0$.

Solución:

(a) Puesto que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2) = 2$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+4} = \sqrt{0+4} = 2$, deducimos que existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y es igual a 2. Como $f(0) = 0+2 = 2$ también, por definición, f es continua en $x = 0$.

(b) La función NO es derivable en $x = 0$ ya que las pendientes de las tangentes por la izquierda y por la derecha en dicho punto no coinciden. A saber, es fácil ver que $f'_-(0) = 1$. Esto se puede calcular o bien derivando la fórmula $f(x) = x+2$, aplicable para $x < 0$ y tomando el límite cuando $x \to 0^-$, o bien por definición:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(h+2)-2}{h} = 1\,.$$

De manera similar, para $x > 0$, la función f viene dada por la fórmula $f(x) = \sqrt{x+4}$ y, por tanto, su derivada para los x positivos es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$. Luego

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \frac{1}{4}\,.$$

El mismo valor puede calcularse por definición:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h+4}-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+4)-4}{h\,(\sqrt{h+4}+2)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h+4}+2} = \frac{1}{4}\,.$$

Puesto que

$$f'_+(0) = \frac{1}{4} \neq 1 = f'_-(0)\,,$$

por definición no existe $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$.

---

2. Calcule los siguientes límites razonadamente.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\cos x}$.

(b) $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}$. (Atención: no se tendrán en cuenta las soluciones que apliquen fórmulas hechas de los libros de bachillerato para las formas exponenciales, salvo que se demuestren correctamente.)

Solución:

(a) El siguiente límite, muy parecido al nuestro:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$$

es una forma indeterminada de tipo $0/0$. Para calcularlo, habría que aplicar L'Hopital dos veces.
Sin embargo, nuestro límite puede calcularse sustituyendo de forma directa el valor $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x} = \frac{e^0 - 0 - 1}{\cos 0} = \frac{1 - 1}{1} = 0\,.$$

(b) Nuestro límite es una forma indeterminada de tipo 1^∞. Conviene convertirlo en un cociente para poder aplicar la regla de L'Hopital. Usaremos la notación

$$L = \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x}\ .$$

La función logaritmo es continua, luego $\lim \ln \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln f(x)$, para cualquier función positiva y continua f. Esto nos permite intercambiar el logaritmo y el límite, para luego aplicar L'Hopital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+} \ln (\cos x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)}{1} = \lim_{x\to 0^+} (-\operatorname{tg} x) = -\operatorname{tg} 0 = 0\,.$$

Finalmente, $L = e^0 = 1$.

3. Consideremos la función $f(x) = (x^2 + 3x + 1)\, e^x$.

¿En qué puntos la función f alcanza sus valores máximo y mínimo? Explique si son extremos relativos (locales) o absolutos (globales).

Solución:

Primero tenemos que derivar la función f. Aplicando la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+3x+1)'\, e^x + (x^2+3x+1)\,(e^x)' \\ &= (2x+3)\, e^x + (x^2+3x+1)\, e^x \\ &= (x^2+5x+4)\, e^x \\ &= (x+1)\,(x+4)\, e^x\,. \end{aligned}$$

La última factorización se obtiene observando que las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2+5x+4=0$ son $x=-1$ y $x=-4$.
Recordando que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el signo de $f'(x)$ es el mismo que el signo de $(x+1)\,(x+4)$ y que los puntos críticos (los ceros de la derivada) de f son $x=-1$ y $x=-4$. La función es positiva para $x<-4$ y también para $x>-1$. Es negativa cuando $-4<x<-1$.
Por consiguiente, f crece en cada uno de los intervalos $(-\infty,-4)$, $(-1,+\infty)$ y decrece en el intervalo $(-4,-1)$.
Esto significa que f tiene un máximo local en $x=-4$ y un mínimo local en $x=-1$. Los valores en esos puntos son:

$$f(-4) = \frac{5}{e^4} > 0\,, \qquad f(-1) = \frac{-1}{e} < 0\,.$$

Para ver si dichos extremos son globales o no, tenemos que examinar el comportamiento de f cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.
Puesto que $x^2+3x+1 \to +\infty$ y $e^x \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, es inmediato que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty$.
El comportamiento de f cuando $x \to -\infty$ es menos obvio, ya que $x^2+3x+1 \to +\infty$ y $e^x \to 0$. Una vez más, conviene convertir el producto en cociente (forma indeterminada ∞/∞) para luego aplicar L'Hopital (dos veces):

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0\,.$$

En resumen, desde $-\infty$ hasta $x=-4$, la función f crece desde el valor 0 hasta alcanzar el valor positivo $5/e^4$. Entre $x=-4$ y $x=-1$ decrece hasta alcanzar el valor negativo $-1/e$ y desde $x=-1$ hasta $+\infty$ crece teniendo a $+\infty$.
La conclusión final es: f no tiene máximo global y, por tanto, el máximo en $x=-4$ es sólo local. Así mismo, el mínimo en $x=-1$ es absoluto.

4. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{\cos x - x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,.$$

a) Demuéstrese que la función f tiene, al menos, un cero en el intervalo $(0, 2)$.

(b) Demuestre, sin calcular explícitamente f', que existe un punto $c \in (-1, 1)$ en el que $f'(c) = 0$.

Solución:

(a) Observamos que la función f es cociente de funciones continuas y derivables, y que el denominador nunca se anula, ya que $x^2 + 2 \geq 2$. Por ello, la función f es continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, en el intervalo cerrado $[0, 2]$. Recordando que $\cos x \leq 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, vemos que

$$f(0) = \frac{\cos 0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0\,, \qquad f(2) = \frac{\cos 2 - 4}{\sqrt{6}} \leq \frac{1-4}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} < 0\,.$$

Por el teorema de Bolzano, f toma el valor intermedio 0 en algún punto $c \in (0, 2)$.

(b) Puede razonarse de, al menos, dos maneras sin calcular la derivada. En ambos casos, es fundamental observar que la función f es par ya que

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) - (-x)^2}{\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{\cos x - x^2}{\sqrt{x^2+2}} = f(x)\,.$$

Solución 1. Por la observación anterior, $f(-1) = f(1)$. Como f es diferenciable, el teorema de Rolle nos dice que en un punto c del intervalo se tiene $f'(c) = 0$.

Solución 2. Alternativamente, es fácil ver que la derivada de una función par es impar. Sea f par. Entonces $f(-x) = f(x)$ para todo x. Derivando ambos lados, obtenemos que $-f'(-x) = f'(x)$; es decir, $f'(-x) = -f'(x)$, lo cual significa que f' es impar. Y, como es impar, se sigue que $f'(0) = 0$, lo cual demuestra nuestra afirmación.