Cálculo I (Grado en Ingeniería Informática) 2013-14

Primer examen parcial, octubre de 2013

(Turno de mañana)

PUNTUACIÓN DEL EXAMEN:

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ______________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ____________________________________

FIRMA: ____

Todos los problemas son de desarrollo. Se pide justificar los razonamientos, mostrar los detalles de las soluciones y nombrar o enunciar los resultados utilizados.

---

1. [2 puntos] Encuentre razonadamente todos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumple que

$$|x^2 - 4x + 4| \leq 25\,.$$

Solución: El problema se puede hacer de varias maneras. Aquí indicaremos la más simple:

$x^2 - 4x + 4$ es un cuadrado perfecto, lo que simplifica bastante los cálculos. De hecho,

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \implies |x^2 - 4x + 4| = |(x-2)^2| = |x-2|^2\,,$$

por lo que

$$\begin{aligned} |x^2 - 4x + 4| \leq 25 \quad &\iff \quad |x-2|^2 \leq 25 \\ &\iff \quad |x-2| \leq 5 \\ &\iff \quad -5 \leq x-2 \leq 5 \\ &\iff \quad -3 \leq x \leq 7\,. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos razonar que el conjunto dado por la desigualdad $|x-2| \leq 5$ es un intervalo cerrado (por el $\leq$) de centro 2 y de radio 5; por tanto el conjunto pedido es el intervalo

$$[2-5, 2+5] = [-3, 7]\,.$$

2. [2 puntos] Calcúlese razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2(n+1)}.$$

Solución: Si intentamos ver cómo queda el límite calculando simplemente límites de cada parte de la expresión, obtendremos una indeterminación del tipo 1^∞, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1, \quad \text{y} \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Para resolver la indeterminación, el camino más sencillo es reconocer el límite asociado al número e; en otras palabras,

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\,,$$

con lo que el límite pedido queda como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)}\right)^2 = e^2\,.$$

3. $[3 = 1 + 2$ puntos$]$

(a) Estudie razonadamente la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}\,.$$

Si usa algún criterio específico, nómbrelo y explique cómo se ha aplicado.

Solución: La potencia n-ésima en el término general de la serie sugiere usar el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4} = \frac{1}{4},$$

donde hemos usado que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, y que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}^2\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Como $\frac{1}{4} < 1$, el criterio de la raíz asegura que la serie converge.

(b) Decida si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}$$

converge absoluta o condicionalmente o diverge. Justifique adecuadamente su respuesta, nombrando o enunciando los criterios aplicados.

Solución: Esta serie tiene términos positivos y negativos (de hecho, es alternada, a partir del tercer término), lo que permite varios tipos de convergencia. Mirando lo que se obtiene cuando quitamos el signo al término general de la serie, observamos que es

$$\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1} \geq 0,$$

lo cual, cuando n es muy grande, se asemeja mucho a $\dfrac{n\sqrt{n}}{n^3}$. Tras simplificar, vemos que esto coincide con $\dfrac{1}{n^{3/2}}$, que es el término general de una p-serie con $p = 3/2$ y por tanto convergente. Para justificar este razonamiento heurístico, usaremos el criterio de comparación asintótica (*i.e*, comparación con límite):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(n^{3/2}-1)}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^{3/2}}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3-n^{3/2}}{n^3}}{\frac{n^3+1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^{3/2}}}{1+\frac{1}{n^3}} = 1$$

Como ese límite existe y es mayor que cero, el comportamiento de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}-1}{n^3+1}$ es el mismo que el de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, y por tanto converge.

La serie pedida convergerá por tanto **absolutamente**.

4. $[3 = 2 + 1$ puntos$]$ La sucesión (a_n) viene dada por la siguiente fórmula recurrente:

$$a_1 = 1\,, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1\,, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Demuestre *por inducción* que $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 2$.

Solución: Tomamos como proposición $\mathcal{P}(n)$ la desigualdad a demostrar, es decir, $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$.

- El caso $\mathcal{P}(2)$ es inmediato, ya que $a_2 = 2$, y $\dfrac{2}{2-1} = 2 \leq a_2 = 2 \leq 2$.
- Asumimos ahora que $\mathcal{P}(n)$ es verdad y procedemos a demostrar $\mathcal{P}(n+1)$ en dos pasos:
  - primero observamos que $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + 1 \leq \dfrac{2}{n} + 1 \leq 1 + 1 = 2$, ya que al ser $n \geq 2$ se tiene que $\dfrac{2}{n} \leq 1$;
  - por otra parte,

  $$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1 \geq \frac{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)}{n} + 1 = \frac{1}{n-1} + 1 = \frac{n}{n-1}\,;$$

  esto no es exactamente lo que queríamos demostrar (que era $a_{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n}$), pero es fácil observar que

  $$\frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}, \quad \text{ya que } n^2 > (n+1)(n-1) = n^2 - 1.$$

  Por lo tanto,

  $$a_{n+1} \geq \frac{n}{n-1} \geq \frac{n+1}{n}$$

  que era lo que queríamos demostrar.

(b) Deduzca que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

Solución: Una vez conocido el apartado anterior del problema, este límite es una aplicación sencilla del teorema del encaje (o del sandwich):

Como $\dfrac{n}{n-1} \leq a_n \leq 2$ para todo $n \geq 2$, dividiendo por n toda la desigualdad, se obtiene que

$$\frac{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{n},$$

o que

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

Como los límites a derecha e izquierda coinciden y son cero, el límite de $\dfrac{a_n}{n}$ también debe ser cero.