Cálculo de primitivas (integrales indefinidas)

1. Calcule las siguientes primitivas:

$$a)\ \int (x^2+3x)\Big(5x^3-\frac{8}{x^3}\Big)\,dx \qquad b)\ \int \Big(e^x(e^x-e^{-x})+\frac{1}{5x-2}\Big)\,dx$$

$$c)\ \int \Big(3\,\mathrm{sen}(5x)-\frac{x}{2}-\frac{5}{1+4x^2}\Big)\,dx \qquad d)\ \int \Big(\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{(4x+1)^2}+\frac{4}{\sqrt{1-2x^2}}\Big)\,dx$$

(Nota: pueden usarse las fórmulas $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan(x/a)+C$; $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin(x/a)+C$).

2. Calcule las siguientes primitivas (integrando por partes):

$$a)\ \int (x^2-2x)e^{-5x+3}\,dx\,,\quad b)\ \int x\cos(5x)\,dx\,,\quad c)\ \int e^{-x}\ \mathrm{sen}\,x\,dx\,,\quad d)\ \int x\sqrt{x+1}\,dx\,.$$

3. Usando la fórmula $\mathrm{sen}^2\,x=1-\cos^2 x$, calcule $I=\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^3\,x\ dx$ y $J=\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^7\,x\ dx$.

4. Calcule las siguientes primitivas (usando el método de las fracciones simples):

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-3)}\,dx,\quad \int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx,\quad \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2}\,dx,\quad \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}\,dx.$$

Integral definida. Teorema fundamental del Cálculo

5. Halle $f'(x)$ si

$$a)\ f(x)=\int_0^x (1+t^2)^{-2}\,dt,\quad b)\ f(x)=\int_0^{x^2}(1+t^2)^{-3}\,dt,\quad c)\ f(x)=\int_{x^3}^{x^2}(1+t^2)^{-3}\,dt$$

6. Compruebe que

$$\int_0^x |t|\,dt=\frac{1}{2}x\,|x| \qquad \text{para todo } x\in\mathbb{R}.$$

7. Supongamos que f es una función derivable en todo x y que satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)\,dt=-\frac{1}{2}+x^2+x\,\mathrm{sen}(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x) \quad \text{para todo} \quad x\geq 0\,.$$

Calcule $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

Cálculo de integrales definidas a través de primitivas

8. Calcule $\int_0^1 f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\ \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\,,\qquad b)\ \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,,\qquad c)\ \frac{4^x+1}{2^x+1}\,,\qquad d)\ \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,.$$

(Nota: puede usar que $\int dx/\sqrt{x^2+1} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+K$).

9. Calcule $\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$, con $f(x)$ igual a:

$$a)\ \operatorname{tg} x \qquad b)\ \cos^4 x \qquad c)\ \operatorname{tg}^2 x \qquad d)\ \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x$$

Cálculo de áreas

10. Calcule el área de la región limitada por

a) el eje X y la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 8\pi]$;

b) el intervalo $[0, \pi]$ del eje X y la gráfica de la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (la función “parte entera”, o “suelo”).

11. Halle el área de la región limitada por las gráficas de los pares de funciones que se indican:

$$a)\ f(x) = \frac{2}{4x^2+1} \quad \text{y} \quad g(x) = 2|x|,$$
$$b)\ f(x) = x\left(e^x+1\right) \quad \text{y} \quad g(x) = x + x^2 e^x,$$

12. Dada $f(x) = x^2 - 2x + 7$, consideremos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$ y la gráfica de f. Halle el área de T.

13. Halle el área de la región acotada por la curva $y^2 = 3x$ y la recta $2y - 2x + 3 = 0$.

14. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, calcule el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Integrales impropias

15. Calcule las siguientes integrales impropias:

$$a)\ \int_0^\infty e^{-5x}\,dx\,, \qquad b)\ \int_0^1 \ln x\,dx\,, \qquad c)\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\,.$$

Aplicaciones de la integral a las series

16. Estudia la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}, \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$