

Comentario. Conviene recordar la siguiente fórmula, vista en clase y en todos los textos:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Hay que interpretarla de manera siguiente: la fórmula es válida tanto en el intervalo $(-\infty, 0)$ como en $(0, +\infty)$ pero la constante C puede tomar diferentes valores en cada uno de los intervalos. Por ejemplo, la función

$$F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + \pi, & \text{si } x < 0, \\ \ln x - 145, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

también es una función primitiva de $1/x$, al igual que $\ln |x| + \pi$.

En el caso de fórmulas con varios logaritmos como, por ejemplo,

$$\frac{1}{4} \ln |x + 1| + \frac{3}{4} \ln |x - 3| + C$$

entenderemos que hay que interpretar la función en varios intervalos de la recta (finitos o infinitos) y con, posiblemente, diferentes valores de la constante C en cada uno de ellos. En este caso concreto, se trata de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

1. Respuestas finales:

- a) $\int (x^2 + 3x) \left(5x^3 - \frac{8}{x^3} \right) dx = \frac{5}{6} x^6 + 3x^5 + \frac{24}{x} - 8 \ln |x| + C$
 b) $\int \left(e^x (e^x - e^{-x}) + \frac{1}{5x - 2} \right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - x + \frac{1}{5} \ln |5x - 2| + C$
 c) $\int \left(3 \operatorname{sen}(5x) - \frac{x}{2} - \frac{5}{1 + 4x^2} \right) dx = -\frac{3}{5} \cos(5x) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{2} \arctan(2x) + C$
 d) $\int \left(\frac{x}{1 + x^2} + \frac{2}{(4x + 1)^2} + \frac{4}{\sqrt{1 - 2x^2}} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2} \frac{1}{4x + 1} + 2\sqrt{2} \arcsin(\sqrt{2}x) + C$

2. Soluciones:

- a) $\int (x^2 - 2x) e^{-5x+3} dx = (-25x^2 + 40x + 8) \frac{e^{-5x+3}}{125} + C$
 b) $\int x \cos(5x) dx = \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{5} x \sin(5x) + C$
 c) $\int \operatorname{sen} x e^{-x} dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) + C$
 d) $\int x \sqrt{x + 1} dx = \frac{2}{5} (x + 1)^{5/2} - \frac{2}{3} (x + 1)^{3/2} + C.$

Sugerencia para el apartado (a): integrar por partes dos veces.

Sugerencia para el apartado (d): integrar por partes, con $u = x$, $dv = \sqrt{x + 1} dx$.

3. Respuesta:

$$J = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 x dx = \frac{16}{35}.$$

4. Soluciones:

$$\begin{aligned} a) \int \frac{x}{(x+1)(x-3)} dx &= \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{3}{4} \ln|x-3| + C \\ b) \int \frac{x^3+1}{x^3+x} dx &= x + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \arctan x + C \\ c) \int \frac{2}{(x-1)(x+3)^2} dx &= \frac{1}{8} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{8} \ln|x+3| + C \\ d) \int \frac{5x^2+5}{(x^2-1)(x^2+2x+2)} dx \\ &= \ln|x-1| - 5 \ln|x+1| + 2 \ln(x^2+2x+2) + 3 \arctan(x+1) + C \end{aligned}$$

5. (a) $f'(x) = (1+x^2)^{-2}$, (b) $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^4)^3}$, (c) $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^4)^3} - \frac{3x^2}{(1+x^6)^3}$.

8. El último apartado se incluye sólo a título informativo para quienes quieran realizar un estudio individual más detallado. La función indicada es la arco tangente hiperbólica, la inversa de la función tangente hiperbólica.

$$\begin{aligned} a) \int_0^1 \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} dx &= \frac{1}{2} (\arctan(e/2) - \arctan(1/2)) \\ b) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx &= \frac{2}{3} (1+e)^{3/2} - 2\sqrt{1+e} + \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ c) \int_0^1 \frac{4^x+1}{2^x+1} dx &= \frac{1}{\ln 2} (-2 \ln 3 + 3 \ln 2 + 1) \\ d) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{arctanh}(\sqrt{2}/2) \end{aligned}$$

9. Soluciones finales:

$$\begin{aligned} a) \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx &= \frac{1}{2} \ln 2 & b) \int_0^{\pi/4} \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} + \frac{3}{32} \pi \\ c) \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx &= 1 - \frac{\pi}{4} & d) \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x dx &= \frac{5}{384} \end{aligned}$$

10. a) 16, b) $3\pi - 6$.

11. a) $\frac{\pi-1}{2}$, b) $3-e$.

12. $\frac{2}{3}$.

13. $\frac{21}{4}\sqrt{2}$.

14. πab .

15. (a) $\int_0^\infty e^{-5x} dx = \frac{1}{5}$, (b) $\int_0^1 \ln x dx = -1$, (c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x} dx = +\infty$.

16. Respuestas:

a) Converge; b) diverge; c) converge.